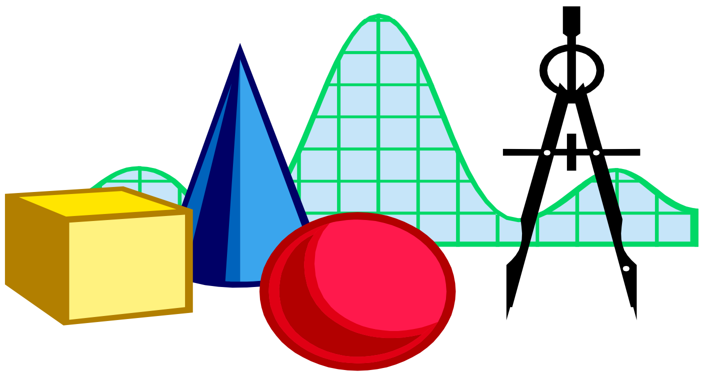
二阶常系数齐次线性微分方程

数学教研室



一、定义

*n*阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = 0$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

二、线性微分方程的解的结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

1. 二阶齐次方程解的结构:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理 1 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程(1)的两个解，那末$y = C_1y_1 + C_2y_2$也是(1)的解.（C_1，C_2是常数）

问题: $y = C_1y_1 + C_2y_2$一定是通解吗？

定义：设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为定义在区间I内的n个函数. 如果存在n个不全为零的常数，使得当x在该区间内有恒等式成立

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0,$$

那么称这n个函数在区间I内线性相关. 否则称线性无关

例如 当$x \in (-\infty, +\infty)$时，e^x, e^{-x}, e^{2x} 线性无关

$1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 线性相关

特别地：　若在 I 上有 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，

则函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在 I 上线性无关.

定理 2： 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的特解，那么 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 就是方程(1)的通解.

例如 $y'' + y = 0$，　$y_1 = \cos x$，$y_2 = \sin x$，

且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数，$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

三、二阶常系数齐次线性方程解法

$y'' + py' + qy = 0$ ——————特征方程法

特点 未知函数与其各阶导数的线性组合等于0

即函数和其各阶导数只相差常数因子

猜想 有特解 $y = e^{rx}$

设 $y = e^{rx}$，将其代入上方程，得

$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$ $\because e^{rx} \neq 0,$

故有 $r^2 + pr + q = 0$ 特征方程

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$

陕西中医药大学

有两个不相等的实根 $(\Delta > 0)$

特征根为 $r_1 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $r_2 = \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

两个线性无关的特解

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x},$$

得齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

有两个相等的实根 $(\Delta=0)$

特征根为 $r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$， 一特解为 $y_1=e^{r_1x}$，

设另一特解为 $y_2=u(x)e^{r_1x}$，

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入原方程并化简，

$$u''+\underline{(2r_1+p)}u'+\underline{(r_1^2+pr_1+q)}u=0,$$

知 $u''=0$， 取 $u(x)=x$， 则 $y_2=xe^{r_1x}$，

得齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$；

有一对共轭复根 $(\Delta<0)$

特征根为 $r_1=\alpha+j\beta,\quad r_2=\alpha-j\beta,$

$$y_1=e^{(\alpha+j\beta)x},\quad y_2=e^{(\alpha-j\beta)x},$$

欧拉公式 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

重新组合 $\bar{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$$\bar{y}_2=\frac{1}{2j}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

得齐次方程的通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$

由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为**特征方程法**.

方法步骤

①写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

②求出特征根 r_1, r_2

③按特征根的三种不同情况依下表写出齐通解

特征根	齐通解
$r_1 \neq r_2$(实)	$Y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2$	$Y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$Y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

例1 求通解 $y''-2y'-3y=0$

解 特征方程为 $r^2-2r-3=0$

特征根为 $r_1=-1, r_2=3$

齐通解为 $Y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$

例2 求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解

解 特征方程为 $r^2+4r+4=0$,

解得 $r_1=r_2=-2$,

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

例3 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

解得 $r_{1,2}=-1\pm 2j$,

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

求解二阶微分方程：

$$(1)y''+4y'+4y=0$$

$$(2)y''-5y'+6y=0$$

$$(3)y''+4y'=0$$

$$(4)y''+y'-2y=0, y'|_{x=0}, y|_{x=0}=0$$


感谢聆听