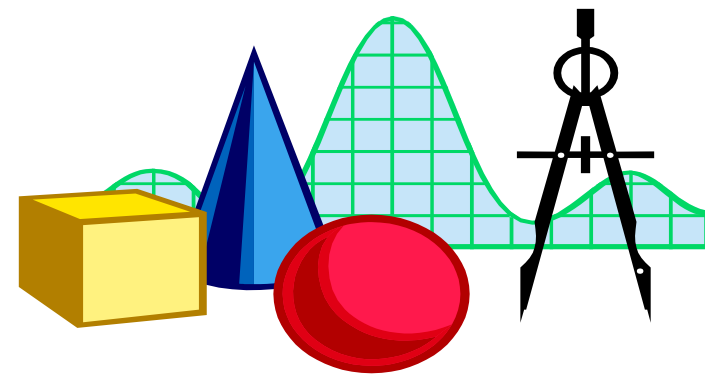


一阶微分方程

数学教研室



一、可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

的方程, 称为可分离变量的微分方程.

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}} dy = 2x^2 dx,$$

解法 将方程改写为变量分离的形式

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

然后两边积分 $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

即得微分方程的通解。

例1 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$

解 分离变量 $\frac{dy}{y} = 2x dx,$

两端积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx,$

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

$\therefore y = ce^{x^2}$ 为所求通解.

例2 求解微分方程 $(1+y^2)dx + xydy = 0$

解 分离变量 $\frac{ydy}{1+y^2} = -\frac{dx}{x},$

两端积分 $\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int -\frac{dx}{x},$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = -\ln x + \ln C$$

$$\therefore x^2(1+y^2) = c \text{ 为所求通解}$$

求解可分离变量的微分方程：

$$(1) e^{x+y} dx + y dy = 0$$

$$(2) \cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0$$

$$(3) y' \sin x = y \ln y, y \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$$

二、 一阶线性微分方程 (Linear differential equation of first order)

1、线性方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

当 $Q(x) \equiv 0$, 上方程称为**齐次的**.

当 $Q(x) \not\equiv 0$, 上方程称为**非齐次的**.

例如 $\frac{dy}{dx} = y + x^2$, $\frac{dx}{dt} = x \sin t + t^2$, 线性的;

$yy' - 2xy = 3$, $y' - \cos y = 1$, 非线性的.

一阶线性微分方程的解法

1. 线性齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx,$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C,$$

$$\text{齐次方程的通解为 } y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

2. 线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.

讨论 $\therefore \frac{dy}{y} = \left[\frac{Q(x)}{y} - P(x) \right] dx,$

两边积分 $\ln|y| = \int \frac{Q(x)}{y} dx - \int P(x) dx,$

设 $\int \frac{Q(x)}{y} dx$ 为 $v(x)$, $\therefore \ln|y| = v(x) - \int P(x) dx,$

即 $y = e^{v(x)} e^{-\int P(x) dx}$. 非齐次方程通解形式

与齐次方程通解相比: $C \Rightarrow u(x)$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

实质：未知函数的变量代换.

新未知函数 $u(x) \Rightarrow$ 原未知函数 $y(x)$,

作变换 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)[-P(x)]e^{\int -P(x)dx},$$

将 y 和 y' 代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$,

积分得 $u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$,

一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] e^{-\int P(x)dx} \\ &= Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \end{aligned}$$

对应齐
次方程
通解

非齐次方程特解

例3 求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解

解 $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{\sin x}{x}$, 直接应用公式

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\ln x} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int \sin x dx + C \right) = \frac{1}{x} (-\cos x + C).$$

例4 求方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

解 $P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = x^2$

(1) 先求出对应的齐次方程的通解

令 $Q(x) = 0$ 得 $y' - \frac{1}{x}y = 0$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \ln y = \ln x + \ln c$$

得通解 $y = cx$

(2) 将 C 换成 x 的函数 $C(x)$, 得到非齐次方程的通解形式

$$\text{令 } y = c(x)x$$

$$\text{则 } y' = c(x)'x + c(x)$$

(3) 将 y 及 y' 代入原非齐次方程中, 得

$$c(x)'x + c(x) - c(x) = x^2$$

$$c'(x) = x$$

$$c(x) = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

(4) 原非齐次线性方程的通解为

$$y = \left(\frac{1}{2} x^2 + c\right) x$$

例5 求方程 $xdy - ydx = y^2 e^y dy$ 的通解.

解 整理得 $(x - y^2 e^y) \frac{dy}{dx} - y = 0$ 不是线性方程

但若变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = -ye^y$

便是以 y 为自变量, x 为未知函数的线性方程

(1) 先求出对应的齐次方程的通解

令 $Q(y) = 0$ 得 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = 0$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \ln x = \ln y + \ln c$$

得通解 $x = cy$

(2) 将C换成y 的函数C(y), 得到非齐次方程的通解形式

$$\text{令 } x = c(y)y$$

$$\text{则 } x' = c(y)'y + c(y)$$

(3) 将 x 及 x' 代入原非齐次方程中, 得

$$c(y)'y + c(y) - c(y) = -ye^y$$

$$c'(y) = -e^y$$

$$c(y) = \int -e^y dy = -e^y + c$$

(4) 原非齐次线性方程的通解为

$$x = y(-e^y + c)$$

求解一阶线性微分方法：

$$(1) y' - 2xy = e^{x^2} \cos x$$

$$(2) y' + y \tan x = \sin 2x$$

$$(3) xy' - y = x^2 e^x$$

$$(4) y' = \frac{1}{e^y + x}$$

$$(5) y' + y \cot x = 5e^{\cos x}, y \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4$$

感谢聆听

