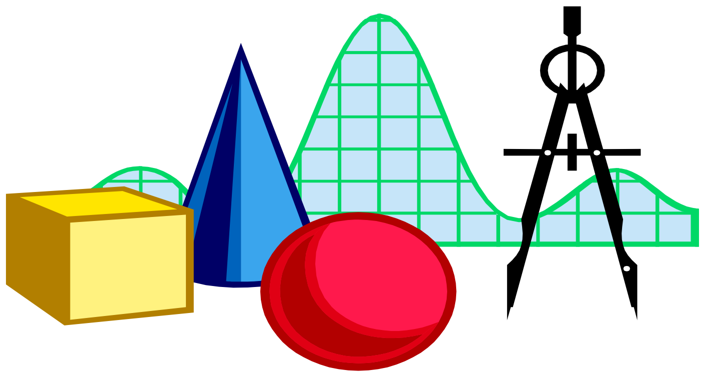
常微分方程

数学教研室



常微分方程是现代数学的一个重要分支，内容十分丰富，作为一种有效的工具在电子科学、自动控制、人口理论、生物数学、工程技术以及其它自然科学和社会科学领域中有着十分广泛的应用。

由于学时有限，高等数学中的常微分方程仅包含几种特殊类型的一阶微分方程的求解，可通过降阶求解的高阶微分方程，二阶常系数齐次和非齐次线性微分方程及其解的结构和特殊情况下的求解方法。

本章先从解决这类实际问题入手，引出微分方程的一些基本概念，然后着重讨论一些特殊类型的微分方程的求解方法。

一、问题的提出

例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$ 其中 $x = 1$ 时, $y = 2$

$y = \int 2x\,dx$ 即 $y = x^2 + C$, 求得 $C = 1$,

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶，当制动时列车获得加速度 -0.4 米/秒^2，问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间内行驶了多少路程？

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米，$s = s(t)$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \qquad t = 0\text{时}, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1 \qquad s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$$

代入条件后知 $C_1 = 20, \quad C_2 = 0$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$$

故 $s = -0.2t^2 + 20t,$

开始制动到列车完全停住共需 $t = \dfrac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$

二、微分方程的定义

微分方程:

凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

例 $y' = xy$, $y'' + 2y' - 3y = e^x$,

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x + y,$$

实质: 联系自变量,未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

分类1：常微分方程，偏常微分方程.

微分方程的阶：微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

分类2：

一阶微分方程 $F(x,y,y')=0,\quad y'=f(x,y);$

高阶(n)微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

分类3：线性与非线性微分方程.

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$$

分类4：单个微分方程与微分方程组.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z, \end{cases}$$

三、主要问题-----求方程的解

微分方程的解:

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数.

设$y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0.$$

微分方程的解的分类:

(1) 通解: 微分方程的解中含有任意常数, 且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

例 $y' = y$,　　通解 $y = ce^{x}$;

$y'' + y = 0$,　　通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$;

(2) 特解:　　确定了通解中任意常数以后的解.

解的图象:　　微分方程的积分曲线.

通解的图象:　　积分曲线族.

初始条件:　　用来确定任意常数的条件.

初值问题： 求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例 验证:函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解. 并求满足初始条件 $x\big|_{t=0} = A, \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$ 的特解.

解 $\because \frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt,$$

将 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 和 x 的表达式代入原方程,

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$$

故 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是原方程的解.

$$\because\ x\big|_{t=0}=A,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0,\quad \therefore\ C_1=A,\quad C_2=0.$$

所求特解为 $x=A\cos kt.$

补充： 微分方程的初等解法：**初等积分法.**

求解微分方程 → **求积分**

(通解可用初等函数或积分表示出来)


感谢聆听