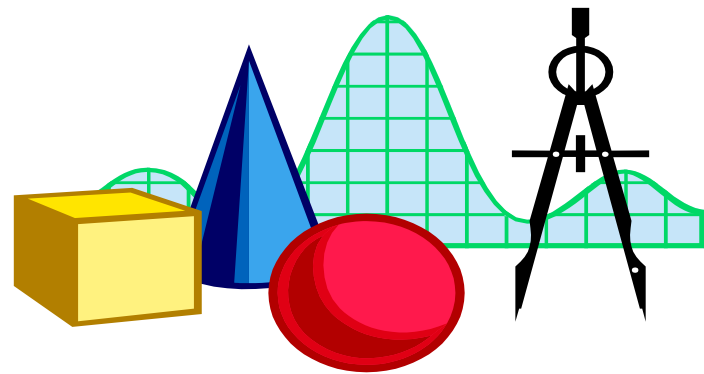


定积分的换元积分法和分部积分法

数学教研室



上一节我们建立了积分学两类基本问题之间的联系——微积分基本公式，利用这个公式计算定积分的关键是求出不定积分，而换元法和分部积分法是求不定积分的两种基本方法，如果能把这两种方法直接应用到定积分的计算，相信定能使得定积分的计算简化，下面我们就来建立定积分的换元积分公式和分部积分公式。

一、引例：先来看一个例子

例1 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

换元求不定积分 令 $t = \sqrt{2x+1}$ 则 $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} + 2}{t} t dt = \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t + C$$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} + \frac{3}{2}(2x+1)^{1/2} + C$$

故

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{22}{3}$$

尝试一下直接换元求定积分

为去掉根号 令 $t = \sqrt{2x+1}$ 则 $x = \frac{t^2-1}{2}$

$$dx = t dt$$

当 x 从0连续地增加到4时, t
相应地从1连续地增加到3

$$\left(\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0\right)$$

$$\text{于是 } \int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2 + 3) dt = \frac{22}{3}$$

由此可见，定积分也可以象不定积分一样进行换元，所不同的是不定积分换元时要回代原积分变量，而对定积分则只需将其上、下限换成新变量的上、下限即可计算出定积分，而不必回代原积分变量

将上例一般化就得到定积分的换元积分公式

二、定积分的换元积分法

假设

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;

(2) 函数 $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是单值的且有连续导数;

(3) 当 t 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上变化时, $x = \varphi(t)$ 的值在 $[a, b]$ 上变化, 且 $\varphi(\alpha) = a$ 、 $\varphi(\beta) = b$,

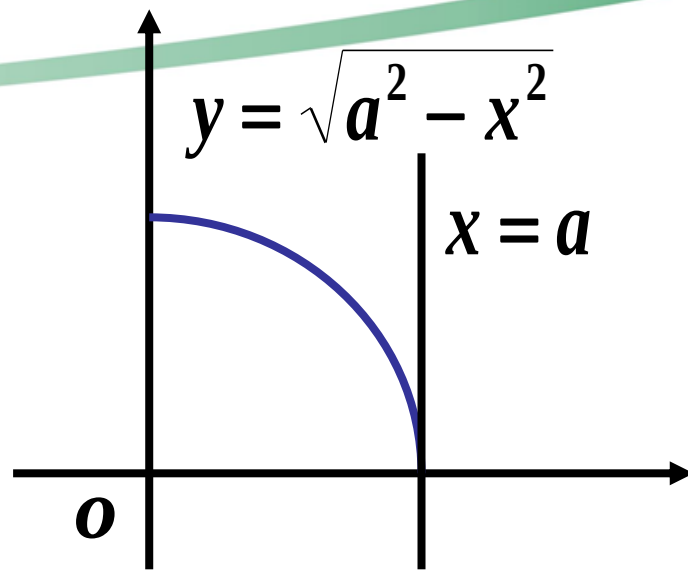
则 有 $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

例1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

解1 由定积分的几何意义

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

等于圆周的第一象限部分的面积 $= \frac{\pi a^2}{4}$



解2 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

故 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}$

解3 令 $x = a \sin t$ $dx = a \cos t dt$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \quad x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi a^2}{4}$$

解4 令 $x = a \cos t$

仍可得到上述结果

例2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$.

解 令 $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$,

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0, \quad x = 0 \Rightarrow t = 1,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx \\ &= -\int_1^0 t^5 dt = \left. \frac{t^6}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例3 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$.

解 $\because f(x) = \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = |\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} |\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin x)^{\frac{3}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x (\sin x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{3}{2}} d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{\frac{3}{2}} d \sin x \\ &= \frac{2}{5} (\sin x)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5} (\sin x)^{\frac{5}{2}} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

例4 计算 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}.$

解 原式 $= \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

$$= \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x} \sqrt{(1-\ln x)}} = 2 \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$= 2 \left[\arcsin(\sqrt{\ln x}) \right]_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{6}.$$

四、凑微分法求定积分的作业：

$$(1) \int_{-2}^1 \frac{1}{(11+5x)^3} dx$$

$$(2) \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$(3) \int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$$

$$(4) \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

五、换元法求定积分的作业：

$$(1) \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$$

$$(2) \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

$$(3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(4) \int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} dx$$

例 5 当 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx \quad \text{且有}$$

① $f(x)$ 为偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

② $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

证 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$

在 $\int_{-a}^0 f(x) dx$ 中令 $x = -t,$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt,$$

① $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-t) = f(t)$,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(t) dt;$$

② $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-t) = -f(t)$,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

即: 奇函数在对称区间上的积分等于0

偶函数在对称区间上的积分等于对称的
部分区间上积分的两倍

由定积分的几何意义, 这个结论也是比较明显的

例6 计算 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx.$

解 原式 = $\int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$

偶函数

奇函数

$$= 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 4 \int_0^1 \frac{x^2(1 - \sqrt{1-x^2})}{1 - (1-x^2)} dx$$

$$= 4 \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx = 4 - 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= 4 - \pi.$$

四分之一单位圆的面积

六、利用函数奇偶性求定积分的作业：

$$(1) \int_{-10}^{10} (x - \sqrt{10 - x^2})^2 dx$$

$$(2) \int_{-3}^3 (x^2 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{9 - x^2}) dx$$

$$(3) \int_{-1}^1 \left(\frac{x \sin^4 x}{1 + x^8} + 3x^2 |x| \right) dx$$

七、定积分的分部积分法

定积分也可以象不定积分一样进行分部积分，
设函数 $u(x)$ 、 $v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续导数，则
有 $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$.

定积分的分部积分公式

推导 $(uv)' = u'v + uv'$, $\int_a^b (uv)' dx = [uv]_a^b$,

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx,$$

$$\therefore \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

例1 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

解 令 $u = \arcsin x$, $dv = dx$,

则 $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left[x \arcsin x \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例2 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2} dx$.

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2} dx = -\int_0^1 \ln(1+x) d\frac{1}{2+x}$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x} d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x} \cdot \frac{1}{1+x} dx$$

$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln(1+x) - \ln(2+x)]_0^1 = \frac{5}{3} \ln 2 - \ln 3.$$

例3 设 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解 因为 $\frac{\sin t}{t}$ 没有初等形式的原函数,
无法直接求出 $f(x)$, 所以采用分部积分法

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 f(x)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 df(x)$$

$$= \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx$$

$$\because f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt, \quad f(1) = \int_1^1 \frac{\sin t}{t} dt = 0,$$

$$f'(x) = \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x = \frac{2 \sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 2x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 dx^2$$

$$= \frac{1}{2} [\cos x^2]_0^1 = \frac{1}{2} (\cos 1 - 1).$$

八、分部积分法求定积分的作业：

$$(1) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

$$(2) \int_0^1 x \arctan x dx$$

$$(3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$(4) \int_1^e \sin \ln x dx$$

感谢聆听

