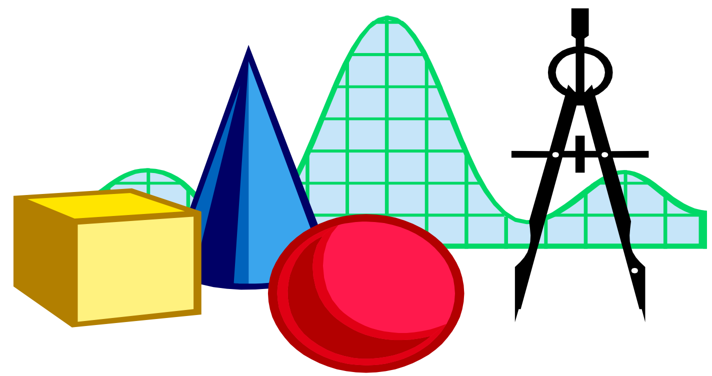
定积分的
定义和性质

数学教研室

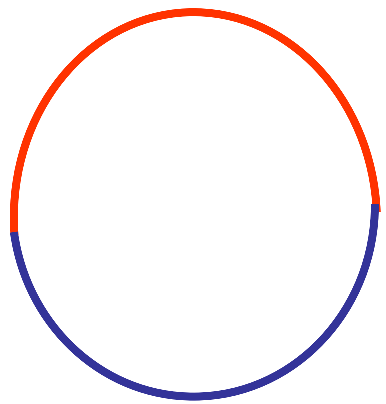


前一章我们从导数的逆运算引出了不定积分，系统地介绍了积分法，这是积分学的第一类基本问题。本章先从实例出发，引出积分学的第二类基本问题——定积分，它是微分（求局部量）的逆运算（微分的无限求和——求总量），然后着重介绍定积分的计算方法，它在科学技术领域中有着极其广泛的应用。

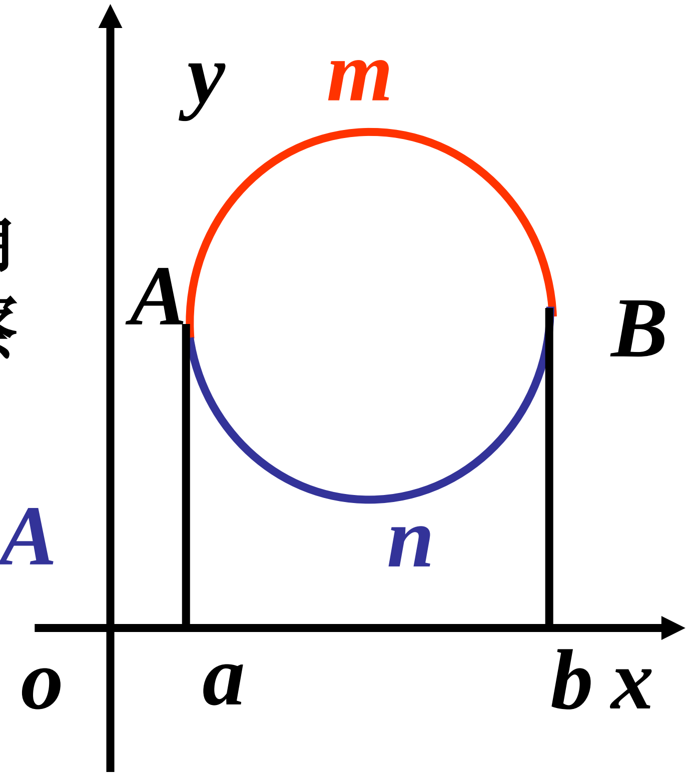
一、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积）

求面积问题由来已久，对于由直线所围成的平面图形的面积我们已经会求，下图所示的图形如何求面积



将其置于直角坐标系下考察



问题归结为$AmBbaA$与$AnBbaA$的面积之差

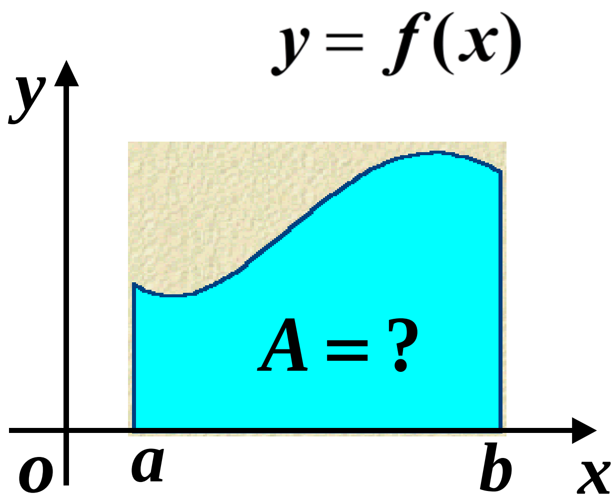
曲边梯形

曲边梯形由连续曲线

$y = f(x)(f(x) \geq 0)$、

x轴与两条直线$x = a$、

$x = b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积

二、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入

若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取

一点 ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$

并作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，

如果不论对 $[a,b]$ 怎样的分法，也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上

点 ξ_i 怎样的取法，只要当 $\lambda \to 0$ 时，和 S 总趋于

确定的极限 I，我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$

在区间$[a,b]$上的**定积分**，记为

积分上限

$$\int_a^b \boxed{f(x)dx} = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ 积分区间

注意：

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i 的取法是任意的.

（3）当函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可积.

三、存在定理

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，

称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，

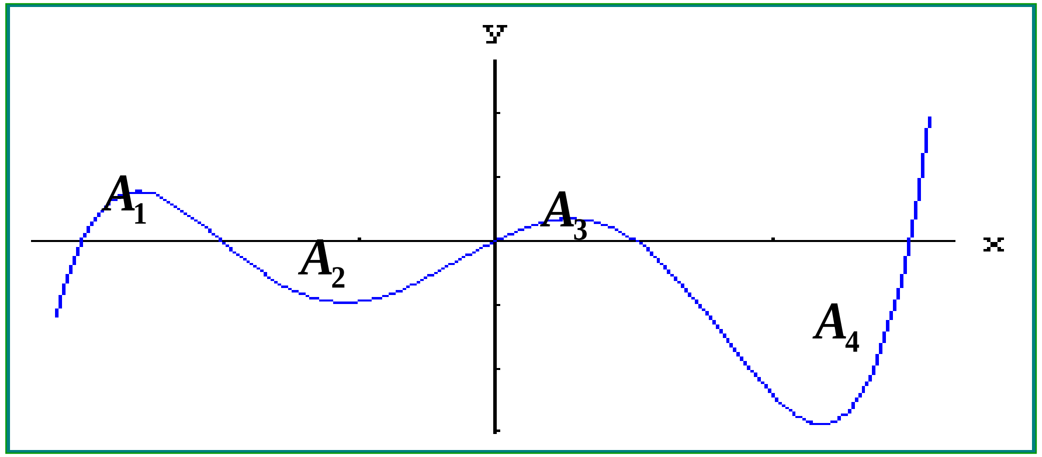
且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在

区间 $[a,b]$ 上可积.

四、定积分的几何意义

$f(x) > 0, \quad \int_a^b f(x)dx = A$ 曲边梯形的面积

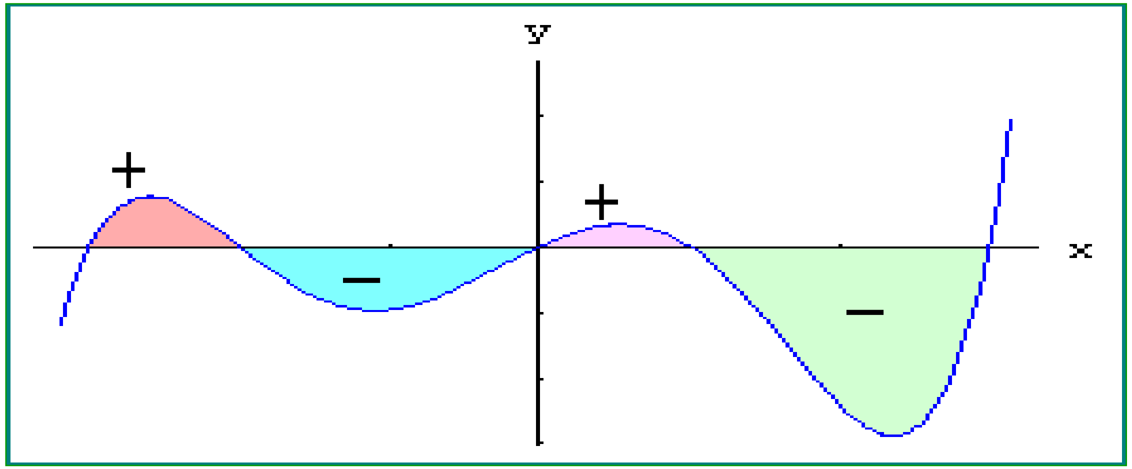
$f(x) < 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -A$ 曲边梯形的面积的负值



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和．在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号．



五、定积分的性质

1、基本内容

对定积分的**补充规定**:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

说明 在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小.

性质1

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

证 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

$$\int_a^b [\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]dx = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)dx$$

性质2 $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k\text{为常数}).$$

证 $$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k\int_a^b f(x)dx.$$

性质1+性质2 得:

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx$$

$$= \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

推广：

$$\int_a^b [\sum_{i=1}^n k_i f_i(x)]dx = \sum_{i=1}^n k_i \int_a^b f_i(x)dx$$

即线性组合的定积分等于定积分的线性组合

——说明定积分也具有**线性运算性质**

性质3 假设$a<c<b$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论a,b,c 的相对位置如何，上式总成立.

例 若 $a<b<c$,

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

则 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

（定积分对于积分区间具有可加性）

性质4 $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a.$

性质5（非负性） 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$，

则$\int_a^b f(x)dx\geq 0. \quad (a<b)$

证 $\because\ f(x)\geq 0,\quad \therefore\ f(\xi_i)\geq 0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$

$\because\ \Delta x_i\geq 0,\quad \therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0,$

$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$

$\therefore\ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\geq 0.$

例 1 比较积分值$\int_0^{-2} e^x dx$和$\int_0^{-2} x dx$的大小.

解 令 $f(x) = e^x - x, \quad x \in [-2, 0]$

$\because f(x) > 0, \quad \therefore \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$ 于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

性质5的推论：（比较定理）

（1） 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\le g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.　　$(a<b)$

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.　$(a<b)$

说明： $|f(x)|$在区间$[a,b]$上的 可积性是显然的.

比较大小：

$$(1)\int_0^1 x^2dx \qquad \int_0^1 x^3dx$$

$$(2)\int_1^e \ln x dx \qquad \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$(3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$$

性质6（估值定理）设 M 及 m 分别是函数

$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，

则 $$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

证 $\because\ m\le f(x)\le M,\ \therefore\ \int_a^b m dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M dx,$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

例 2 估计积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$的值.

解

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\qquad x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$$

$f(x)$在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上单调下降,

故$x=\frac{\pi}{4}$为最大点，$x=\frac{\pi}{2}$为最小点, $M=f(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$,

$$m=f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi},\qquad \because\ b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

估计定积分的值：

$$(1)\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$$

$$(2)\int_{0}^{2} e^{x^2-x} dx$$

性质7（定积分中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).\qquad (a \le \xi \le b)$

积分中值公式

证 $\because\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

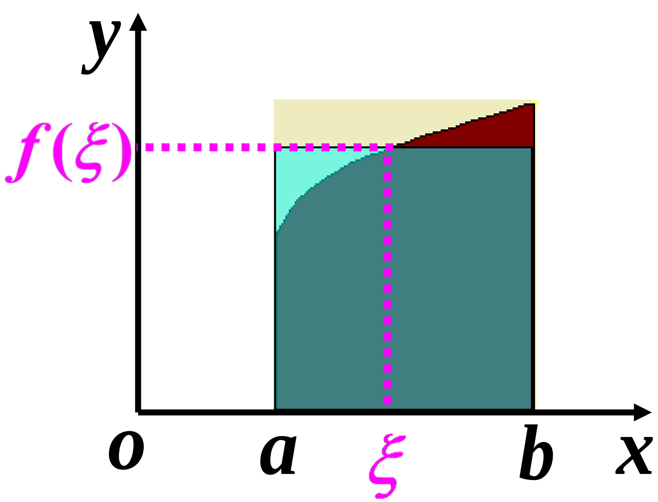
由闭区间上连续函数的介值定理知

在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ,

使 $$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).\quad (a\le\xi\le b)$$

积分中值公式的几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

例 3 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\dfrac{3}{t}f(t)dt$.

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x,x+2]$，

使 $\displaystyle\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x)$，

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)\ =6.$$


感谢聆听