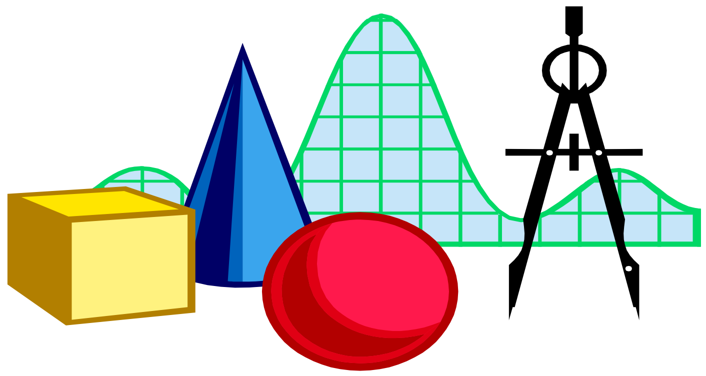
分部积分法

数学教研室



前面我们在复合函数微分法的基础上，得到了换元积分法。换元积分法是积分的一种基本方法。本节我们将介绍另一种基本积分方法——分部积分法，它是两个函数乘积的微分法则的逆转。

一、基本内容

问题 $\int xe^x dx = ?$

解决思路：利用两个函数乘积的求导法则.

设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$具有连续导数,

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad uv' = (uv)' - u'v,$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

分部积分公式

注 分部积分公式的特点：等式两边 u,v 互换位置

分部积分公式的作用：当左边的积分 $\int u\,dv$ 不易求得，而右边的积分 $\int v\,du$ 容易求得

利用分部积分公式——化难为易

例1　求积分 $\int x\cos x dx.$

解（一）令$u=\cos x$，　$xdx=\frac{1}{2}dx^2=dv$

$$\int x\cos x dx=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x dx$$

显然，u,v' 选择不当，积分更难进行.

解（二）令$u=x$，$\cos x dx=d\sin x=dv$

$$\int x\cos x dx=\int x d\sin x=x\sin x-\int\sin x dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C.$$

分部积分公式运用成败的关键是恰当地选择u, v

一般来说， u, v 选取的原则是：

（1）积分容易者选为v

（2）求导简单者选为u

分部积分法的实质是：将所求积分化为两个积分之差，积分容易者先积分。实际上是两次积分。

例2 求积分 $\int x^2e^xdx.$

解 $u=x^2, \quad e^xdx=de^x=dv,$

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

（再次使用分部积分法）$u=x, \quad e^xdx=dv$

$$=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$$

总结 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例3 求积分 $\int x\arctan x dx.$

解 令$u=\arctan x$， $xdx=d\dfrac{x^2}{2}=dv$

$$\int x\arctan x dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}d(\arctan x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例4　求积分 $\int x^3 \ln x dx.$

解　$u = \ln x, \quad x^3 dx = d\dfrac{x^4}{4} = dv,$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

总结　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u .这样使用一次分部积分公式就可使被积函数降次、简化、代数化、有理化。目的、宗旨只有一个：容易积分。

例5　求积分 $\int \sin(\ln x)dx.$

解 $\boxed{\int \sin(\ln x)dx} = x\sin(\ln x) - \int x d[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int x d[\cos(\ln x)]$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)dx}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

注：本题也可令 $t = \ln x$

分部积分过程中出现循环，实质上是得到待求积分的代数方程，移项即可求得所求积分。注意最后一定要加上积分常数C.

例6 求积分 $\int e^x \sin x dx.$

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x de^x$

$= e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d \cos x)$

$= e^x (\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

例7 $\int \sec^3 x dx$

解 $\boxed{\int \sec^3 x dx} = \int \sec x d \tan x$

$$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x + \int \sec x dx - \int \sec^3 x dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln(\sec x + \tan x) - \boxed{\int \sec^3 x dx}$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln(\sec x + \tan x) + C$$

例8 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$

解一 令 $u=e^x$

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx = \int \frac{\arctan u}{u}\cdot\frac{1}{u}du$$

$$= -\int \arctan u\, d(\frac{1}{u})$$

$$= -\frac{1}{u}\arctan u + \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+u^2}du$$

$$= -\frac{1}{u}\arctan u + \int [\frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}]du$$

$$= -\frac{1}{u}\arctan u + \ln u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$$

$$= -e^{-x}\arctan e^{x} + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$$

解二　直接分部积分

$$\int \frac{\arctan e^{x}}{e^{x}}dx = -\int \arctan e^{x} de^{-x}$$

$$= -e^{-x}\arctan e^{x} + \int e^{-x}\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx$$

$$= -e^{-x}\arctan e^{x} + \int \frac{1}{1+e^{2x}}dx$$

对 $\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx$ 分子分母同乘以 e^{x}

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{2x})}dx$$ 令 $u = e^{x}$

$$= \int \frac{1}{u(1+u^{2})}du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(1+u^{2})$$

或 分子分母同乘以 e^{2x}

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}(1+e^{2x})}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{e^{2x}(1+e^{2x})}d(e^{2x})$$ 令 $t=e^{2x}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t(1+t)}dt \quad =\frac{1}{2}\int[\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}]dt$$

$$=\frac{1}{2}[\ln t-\ln(1+t)]$$

解三　彻底换元

令 $t=\arctan e^{x}$　则 $x=\ln\tan t$

$$\Rightarrow dx=\frac{1}{\tan t}\cdot\sec^2 t dt$$

$$\int\frac{\arctan e^{x}}{e^{x}}dx \quad =\int\frac{t}{\tan t}\cdot\frac{1}{\tan t}\cdot\sec^2 t dt$$

$$= \int t \cdot \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\int t d\cot t$$

$$= -t\cot t + \int \cot t dt$$

$$= -t\cot t + \ln\sin t + C$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + \ln\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} + C$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$$

例9 求积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\boxed{\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}$$

令 $x=\tan t$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t\,dt=\int\sec t\,dt$$

$$=\ln(\sec t+\tan t)+C=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

$$\therefore\quad\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

例 10 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，求 $\int xf'(x)dx$.

解 $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx,$

$\because \left(\int f(x)dx\right)'=f(x),\quad \therefore \int f(x)dx=e^{-x^2}+C,$

两边同时对 x 求导，得 $f(x)=-2xe^{-x^2},$

$\therefore \int xf'(x)dx=xf(x)-\int f(x)dx$

$=-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C.$

二、分部积分法的作业：

$(1)\int x\cos\frac{x}{2}dx$

$(2)\int e^{-x}(x^2-2x+5)dx$

$(3)\int \arctan 2x dx$

$(4)\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$(5)\int e^x(\frac{1}{x}+\ln x)dx$

$(6)\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$

$(7)\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

$(8)\int e^{-x}\cos 2x dx$

$(9)\int (x-1)5^x dx$

$(10)\int (\arcsin x)^2 dx$

三、换元积分与分部积分法结合的作业：

$$1.\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$5.\int \sin x \cdot e^{\sqrt{\cos x}}dx$$

$$2.\int \arctan\sqrt{x}dx$$

$$6.\int e^{\arcsin x}dx$$

$$3.\int e^{\sqrt{x}}dx$$

$$7.\int \ln(1+\sqrt{\tan x})\sec^2 xdx$$

$$4.\int \sin^2\sqrt{x}dx$$

$$8.\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^3}dx$$


感谢聆听