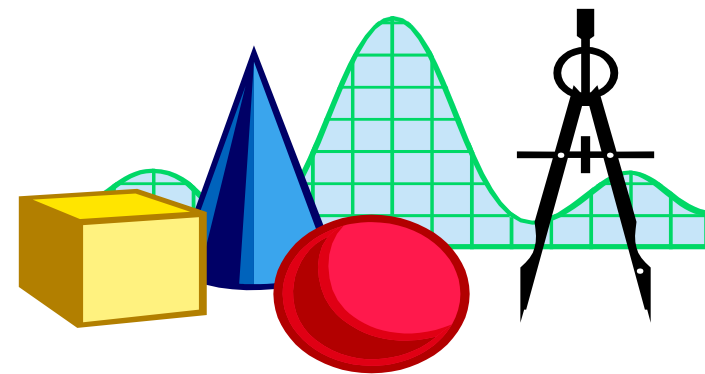


换元积分法

数学教研室



直接利用基本积分表和分项积分法所能计算的不定积分是非常有限的，为了求出更多的积分，需要引进更多的方法和技巧，本节和下节就来介绍求积分的两大基本方法——换元积分法和分部积分法。

在微分学中，复合函数的微分法是一种重要的方法，不定积分作为微分法的逆运算，也有相应的方法。利用中间变量的代换，得到复合函数的积分法——换元积分法。通常根据换元的先后，把换元法分成第一类换元和第二类换元。

一、第一类换元法

问题 $\int \cos 2x dx = ? \sin 2x + C,$

解决方法利用复合函数，设置中间变量.

过程 令 $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt,$

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

$[\frac{1}{2} \sin 2x + C]' = \cos 2x$ 说明结果正确

将上例的解法一般化:

设 $F'(u) = f(u)$, 则 $\int f(u)du = F(u) + C$.

如果 $u = \varphi(x)$ (可微)

$$\therefore dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

$$\therefore \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$$

$$= \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$$

将上述作法总结成定理, 使之合法化, 可得

——换元法积分公式

定理1 设 $f(u)$ 具有原函数, $u = \varphi(x)$ 可导,
则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式 (凑微分法)

说明 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)dx \text{ 化为 } \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

观察重点不同, 所得结论不同.

注 ① 定理说明：若已知 $\int f(u)du = F(u) + C$

$$\text{则 } \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$$

因此该定理的意义就在于把

$\int f(u)du = F(u) + C$ 中的 u 换成另一个 x 的可微函数 $\varphi(x)$ 后，式子仍成立

——又称为积分的形式不变性

这样一来，可使基本积分表中的积分公式的适用范围变得更加广泛。

②由定理可见，虽然 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

是一整体记号，但可把 dx 视为自变量微分

$$\Rightarrow \varphi'(x)dx = d\varphi(x) \quad \text{——凑微分}$$

③凑微分法就在凑微分上，其基本思想就是对被积表达式进行变形，主要考虑如何变化 $f(x)dx$

凑微分法的基本思路：

与基本积分公式相比较，将不同的部分——**中间变量**和**积分变量**——变成相同

步骤：凑微分；换元求出积分；回代原变量

例1 求 $\int \sin 2x dx$.

解 (一)
$$\begin{aligned}\int \sin 2x dx &= \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x + C;\end{aligned}$$

解 (二)
$$\begin{aligned}\int \sin 2x dx &= 2 \int \sin x \cos x dx \\ &= 2 \int \sin x d(\sin x) = (\sin x)^2 + C;\end{aligned}$$

解 (三)
$$\begin{aligned}\int \sin 2x dx &= 2 \int \sin x \cos x dx \\ &= -2 \int \cos x d(\cos x) = -(\cos x)^2 + C.\end{aligned}$$

例2 求 $\int \frac{1}{3+2x} dx$.

解 $\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} \cdot (3+2x)',$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3+2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{3+2x} \cdot (3+2x)' dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u + C = \frac{1}{2} \ln(3+2x) + C. \end{aligned}$$

一般地 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} [\int f(u) du]_{u=ax+b}$

例3 求 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx$.

解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx = \int \frac{1}{1+2\ln x} d(\ln x)$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+2\ln x} d(1+2\ln x)$$

$$u = 1 + 2\ln x$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u + C = \frac{1}{2} \ln(1+2\ln x) + C.$$

例4 求 $\int \frac{x}{(1+x)^3} dx$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x)^3} dx &= \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3} dx \\ &= \int \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3} \right] d(1+x) \\ &= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C.\end{aligned}$$

例5 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 0)$

解 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{1}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \arcsin \frac{x}{a} + C$$

例6 求 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$.

解
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

例7 $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$

解 $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{1}{(a+x)(a-x)} dx$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2a} [\ln |a+x| - \ln |a-x|] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

注意：分母拆项是常用的技巧

例8 求 $\int \frac{1}{x^2 - 8x + 25} dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2 - 8x + 25} dx = \int \frac{1}{(x-4)^2 + 9} dx$

$$= \frac{1}{3^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \arctan \frac{x-4}{3} + C.$$

例9 求 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$.

解 $\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx$

$$= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x)$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

例10 求 $\int (1 - \frac{1}{x^2}) e^{x + \frac{1}{x}} dx$.

解 $\because \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 1 - \frac{1}{x^2},$

$$\therefore \int (1 - \frac{1}{x^2}) e^{x + \frac{1}{x}} dx$$

$$= \int e^{x + \frac{1}{x}} d\left(x + \frac{1}{x}\right) = e^{x + \frac{1}{x}} + C.$$

例11 求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x-1}} dx$.

$$\text{原式} = \int \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-1})} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \sqrt{2x+3} dx - \frac{1}{4} \int \sqrt{2x-1} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sqrt{2x+3} d(2x+3) - \frac{1}{8} \int \sqrt{2x-1} d(2x-1)$$

$$= \frac{1}{12} (\sqrt{2x+3})^3 - \frac{1}{12} (\sqrt{2x-1})^3 + C.$$

例12 求 $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$.

解 $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx$

$$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} d(\sin x) = -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C.$$

或 $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \tan \frac{x}{2} + C$

例13 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x) \\ &= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x) \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C.\end{aligned}$$

说明 当被积函数是三角函数相乘时，
拆开奇次项去凑微分。

例14 求 $\int \csc x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 (一)} \quad \int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\ &= \ln \tan \frac{x}{2} + C = \ln(\csc x - \cot x) + C.\end{aligned}$$

(使用了三角函数恒等变形)

$$\text{解 (二)} \quad \int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$$

$$= -\int \frac{1}{1 - \cos^2 x} d(\cos x) \quad u = \cos x$$

$$= -\int \frac{1}{1 - u^2} du = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - u}{1 + u} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C.$$

$$\text{解 (三)} \quad \int \csc x dx = \int \frac{\csc x (\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x} dx$$

$$= -\int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cdot \cot x}{\csc x + \cot x} dx$$

$$= -\int \frac{1}{\csc x + \cot x} d(\csc x + \cot x)$$

$$= -\ln(\csc x + \cot x) + C = \ln(\csc x - \cot x) + C$$

类似地可推出 $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C.$

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} d(x + \frac{\pi}{2})$$

$$= \ln[\csc(x + \frac{\pi}{2}) - \cot(x + \frac{\pi}{2})] + C$$

$$= \ln(\sec x + \tan x) + C$$

例15 求 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2} \arcsin \frac{x}{2}} dx.$

解 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2} \arcsin \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \arcsin \frac{x}{2}} d\frac{x}{2}$

$$= \int \frac{1}{\arcsin \frac{x}{2}} d\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = \ln \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

第一类换元积分法在积分中是经常使用的方法，不过如何适当地选取代换却没有一般的规律可循，只能具体问题具体分析。要掌握好这种方法，需要熟记一些函数的微分公式，并善于根据这些微分公式对被积表达式做适当的微分变形，拼凑出合适的微分因子。

二、凑微分法的作业：

$$(1) \int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(3) \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{4+x^4} dx$$

$$(6) \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}} dx$$

$$(8) \int \sec^4 x dx$$

感谢聆听

