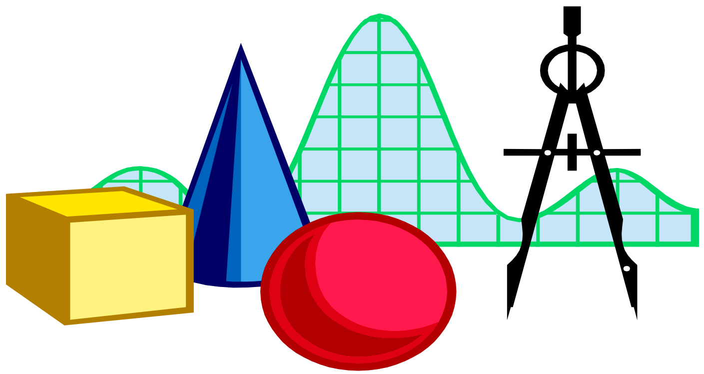
不定积分

数学教研室



前面我们已经研究了一元函数微分学。但在科学技术领域中，还会遇到与此相反的问题：即寻求一个可导函数，使其导数等于一个已知函数。从而产生了一元函数积分学。积分学分为不定积分和定积分两部分。

本章我们先从导数的逆运算引出不定积分的概念然后介绍其性质，最后着重系统地介绍积分方法。

一、不定积分的概念

定义： 如果在区间I 内，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x \in I$，都有$F'(x) = f(x)$或$dF(x) = f(x)dx$，那么函数$F(x)$就称为$f(x)$或$f(x)dx$在区间I 内原函数.

例 $(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $\sin x$是$\cos x$的原函数.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$\ln x$是$\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

关于原函数的说明：

对原函数的研究须讨论解决以下两个问题

(1) 是否任何一个函数都存在原函数？

考察如下的例子

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

若存在可导函数$F(x)$使$F'(x)=f(x)$

则由$f(x)$ 的定义

当$x<0$时 $F'(x)=f(x)=0 \Rightarrow F(x)=C_1$

当$x>0$时 $F'(x)=f(x)=0 \Rightarrow F(x)=C_2$

由$F(x)$可导$\Rightarrow F(x)$在$x=0$处连续

$\Rightarrow C_1 = C_2$　（左、右极限存在且相等）

$\Rightarrow F(x) = C \ \Rightarrow F'(0) = 0$

而已知 $F'(0) = f(0) = 1$ 矛盾

这说明$f(x)$没有原函数

既然不是每一个函数都有原函数，那么我们自然要问：具备什么条件的函数才有原函数？对此我们给出如下的结论：

原函数存在定理：

如果函数 $f(x)$在区间I 内连续，

那么在区间I 内存在可导函数$F(x)$，

使$\forall x \in I$，都有$F'(x) = f(x)$.

简言之： 连续函数一定有原函数.

（2）原函数是否唯一？若不唯一，它们之间有什么联系？

①若 $F'(x)=f(x)$，则对于任意常数 C，$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

②若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)-G(x)=C$ （C 为任意常数）

证 $\because$ $[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)$

$$=f(x)-f(x)=0$$

$\therefore$ $F(x)-G(x)=C$ （C 为任意常数）

不定积分的定义：

在区间I内，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的**不定积分**，记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

为求不定积分，只须求出被积函数的一个原函数再加上积分常数即可。

例1 求 $\int x^5 dx$.

解 $\because \left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, $\therefore \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

例2 求 $\int \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 $\because (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

$$\therefore \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

例3　设曲线通过点（1，2），且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程.

解　设曲线方程为 $y = f(x)$,

根据题意知 $\dfrac{dy}{dx} = 2x$,

即 $f(x)$是$2x$的一个原函数.

$\because \int 2x dx = x^2 + C$,　$\therefore f(x) = x^2 + C$,

由曲线通过点（1，2）$\Rightarrow C = 1$,

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

显然，求不定积分得到一积分曲线族.

由不定积分的定义，可知

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x),\quad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,\quad \int dF(x)=F(x)+C.$$

结论：微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

二、 基本积分公式

实例 $\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu} \Rightarrow \int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$

$(\mu \neq -1)$

启示 能否根据求导公式得出积分公式?

结论 既然积分运算和微分运算是互逆的，
因此可以根据求导公式得出积分公式.

基本积分表☆

(1) $\int k dx = kx + C$ （k是常数）；

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$;

说明： $x > 0, \Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C,$

$x < 0, \ [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-x)' = \dfrac{1}{x},$

$\Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \quad \therefore \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

简写为 $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C.$

$$(4)\quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C;$$

$$(5)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$

$$(6)\quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7)\quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8)\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9)\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$

(12) $\int e^x dx = e^x + C;$

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

以上13个公式是求不定积分的基础，称为基本积分表，必须熟练掌握。

例4 求积分 $\int x^2\sqrt{x}dx.$

解 $\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$

根据积分公式（2） $\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

三、不定积分的性质

(1) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

证 $\because \left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]'$

$$= \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x).$$

$\therefore$ 等式成立.

此性质可推广到有限多个函数之和的情况

$$\int [f_1(x) + \cdots + f_n(x)]dx$$

$$= \int f_1(x)dx + \cdots + \int f_n(x)dx$$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.（$k$ 是常数，$k \neq 0$)

(3) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$,

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx,$$

(4) $\int F'(x)dx = F(x) + C$,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

例5　求积分 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解：$\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

注意：

检验积分结果是否正确，只要把结果求导，看其导数是否等于被积函数

例6 求积分 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \arctan x + \ln x + C.$$

例7　求积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

解：$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

例8　求积分 $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx.$

解　$\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x-1} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$

例9 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

解 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx$

$$= \int [x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}]dx$$

$$= \arctan x + \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

例10 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

解 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int [\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}] dx$

$= \tan x - \cot x + C$

例11 $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx$

解 $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{4}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= 4\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -4\cot x + C$$

说明：以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.

例 12 已知一曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率为 $\sec^2 x+\sin x$，且此曲线与 y 轴的交点为 $(0,5)$，求此曲线的方程.

解 $\because \quad \dfrac{dy}{dx}=\sec^2 x+\sin x,$

$\therefore \quad y=\int\left(\sec^2 x+\sin x\right)dx$

$=\tan x-\cos x+C,$

$\because \quad y(0)=5, \qquad \therefore \quad C=6,$

所求曲线方程为 $\quad y=\tan x-\cos x+6.$

说明

①求不定积分时一定要加上积分常数，它表明一个函数的原函数有无穷多个，即要求的是全体原函数，若不加积分常数则表示只求出了一个原函数。

②写成分项积分后，积分常数可以只写一个。

③积分的结果在形式上可能有所不同，但实质上只相差一个常数。

四、作业：直接积分法

(1) $\int 3^x e^x dx$

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$

(3) $\int \cot^2 x dx$

(4) $\int \frac{6^x - 2^x}{3^x} dx$

(5) $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$

(6) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + 5x^2}{x^3} dx$

(7) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

(8) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$


感谢聆听