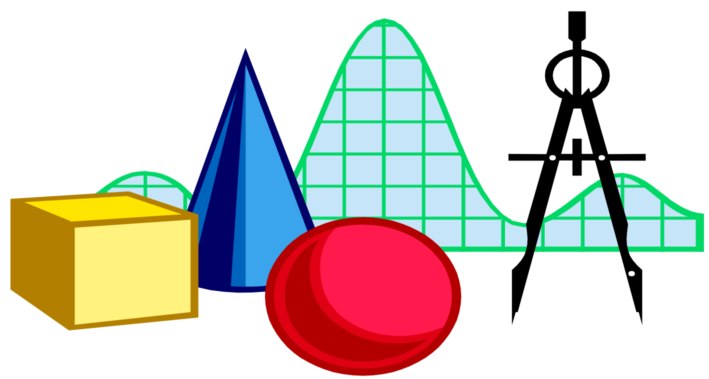
渐近线和绘图

数学教研室



一、函数曲线的渐近线

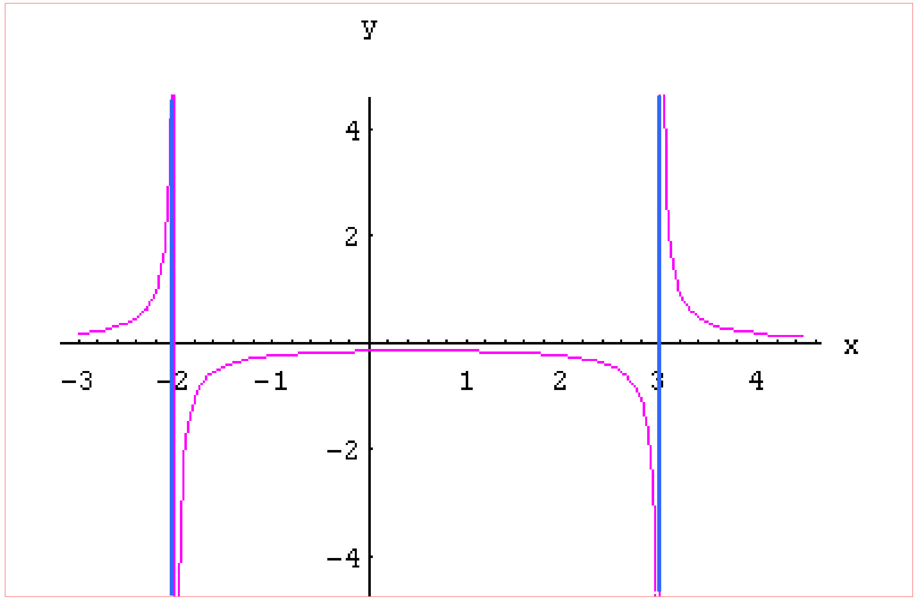
定义： 当曲线 $y=f(x)$ 上的一动点 P 沿着曲线移向无穷点时，如果点 P 到某定直线 L 的距离趋向于零，那么直线 L 就称为曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线.

1. 垂直渐近线(垂直于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$

那么 $x=x_0$ 就是 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线.

例如 $y=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$,



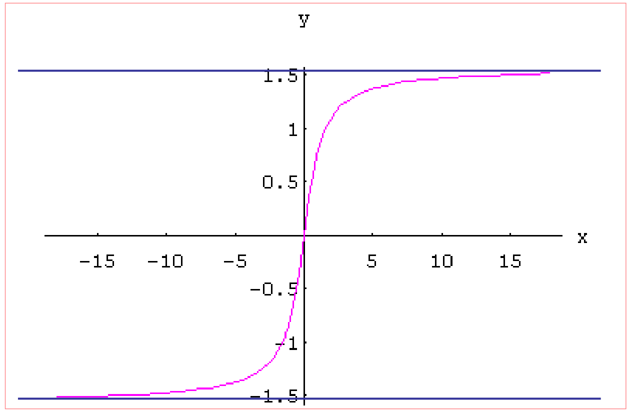
有铅直渐近线两条： $x=-2,\quad x=3.$

2. 水平渐近线 (平行于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ （b 为常数)

那么 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如 $y=\arctan x$,



有水平渐近线两条: $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=-\dfrac{\pi}{2}$.

3. 斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ $(a,b\text{为常数})$

那么 $y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

斜渐近线求法:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b.$$

那么 $y=ax+b$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

例1： 计算 $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(x-1)}$ 的渐近线

$$\because \lim_{x\to 1} f(x)=\infty$$

$\therefore$ $x=1$ 是曲线的铅直渐近线.

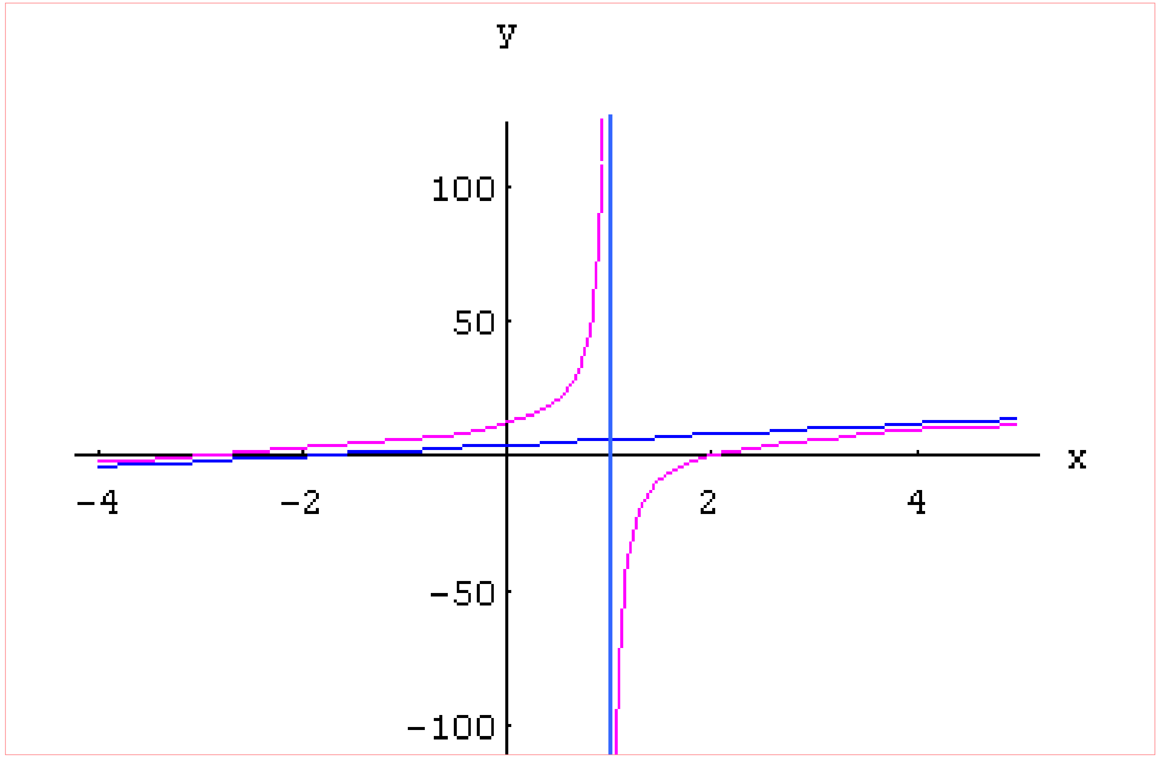
$$\text{又}\because \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)}=2,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(x-2)(x+3)}{(x-1)}-2x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)(x+3)-2x(x-1)}{x-1}=4,$$

$\therefore$ $y=2x+4$ 是曲线的一条斜渐近线.

$$f(x)=\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$$ 的两条渐近线如图



二、作业：求渐近线。

$$(1)y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$(2)y = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(3)y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x-1}$$

三、图形描绘的步骤

利用函数特性描绘函数图形.

$\boxed{\text{第一步}}$ 确定函数$y=f(x)$的定义域,对函数进行奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态的讨论,求出函数的一阶导数$f'(x)$和二阶导数$f''(x)$;

$\boxed{\text{第二步}}$ 求出方程$f'(x)=0$和$f''(x)=0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些根同函数的间断点或导数不存在的点把函数的定义域划分成几个部分区间.

第三步 确定在这些部分区间内$f'(x)$和$f''(x)$的符号，并由此确定函数的增减性与极值及曲线的凹凸与拐点（可列表进行讨论）;

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线、斜渐近线以及其他变化趋势;

第五步 描出与方程$f'(x)=0$和$f''(x)=0$的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，再综合前四步讨论的结果画出函数的图形.

注 描出图形上处于重要位置的点（峰、谷、拐点、与坐标轴的交点等）掌握图形在各部分区间上的主要性态（升降、凹凸等），比较准确地描绘处函数图形的特性。

例2 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解 $D: x \neq 0$, 非奇非偶函数, 且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3}, \qquad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=-2$,

令 $f''(x)=0$, 得特殊点 $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2]=-2$, 得水平渐近线 $y=-2$;

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2\right] = +\infty,$$

得铅直渐近线 $x = 0.$

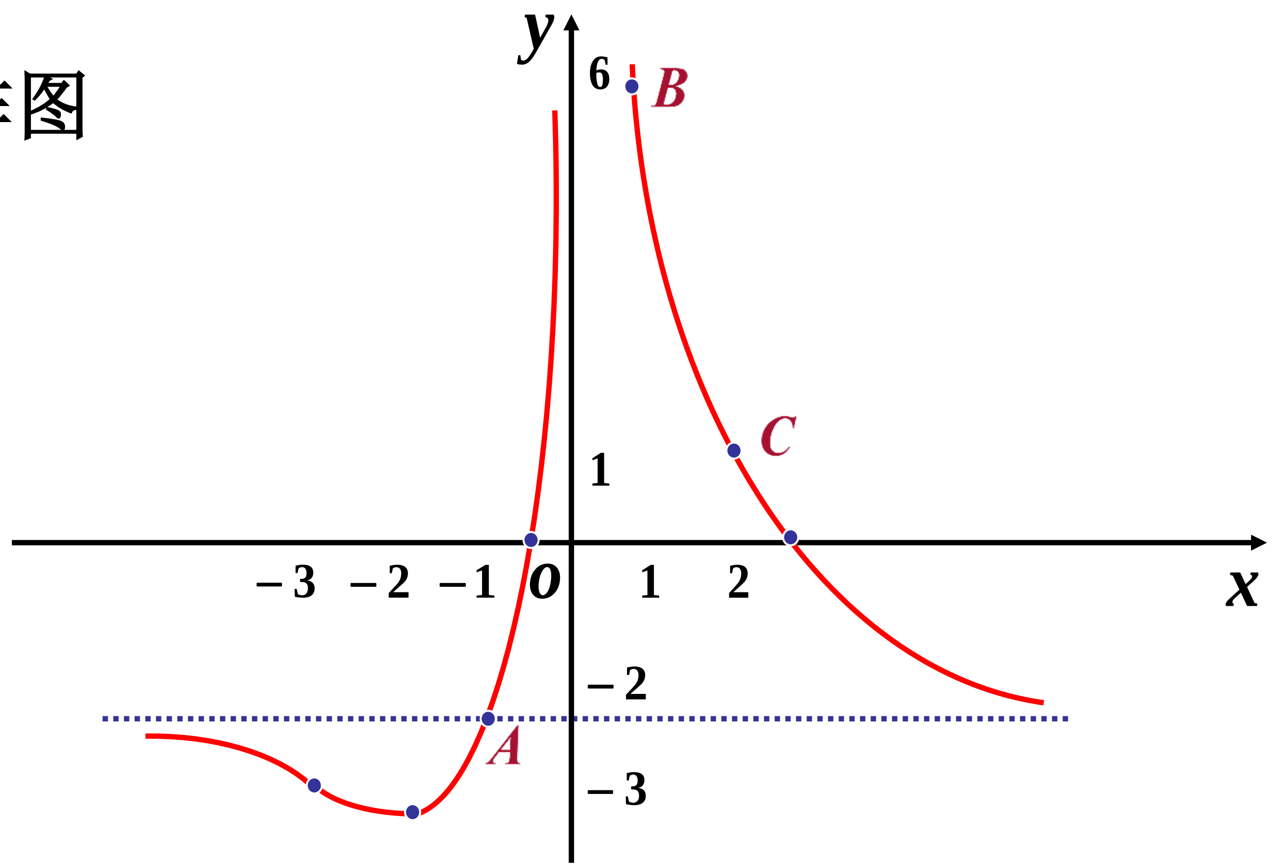
列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点和拐点:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$		极值点 -3		间断点	

补充点：$(1-\sqrt{3},0)$，$(1+\sqrt{3},0)$;

$A(-1,-2)$，　$B(1,6)$，　$C(2,1)$.

作图



四、作业：描绘函数的图形。

$$(1)\, y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

$$(2)\, y=\frac{x^2}{1+x}$$


感谢聆听