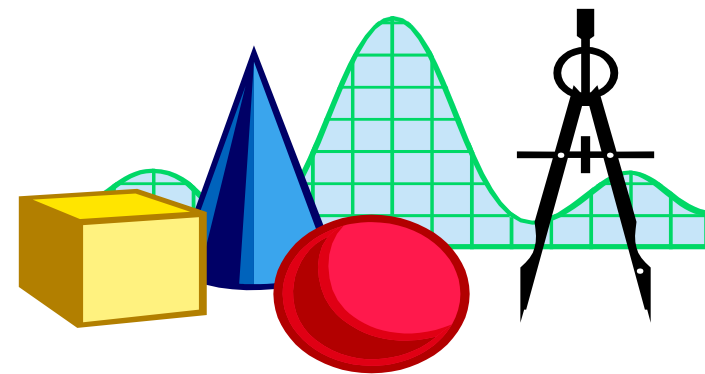


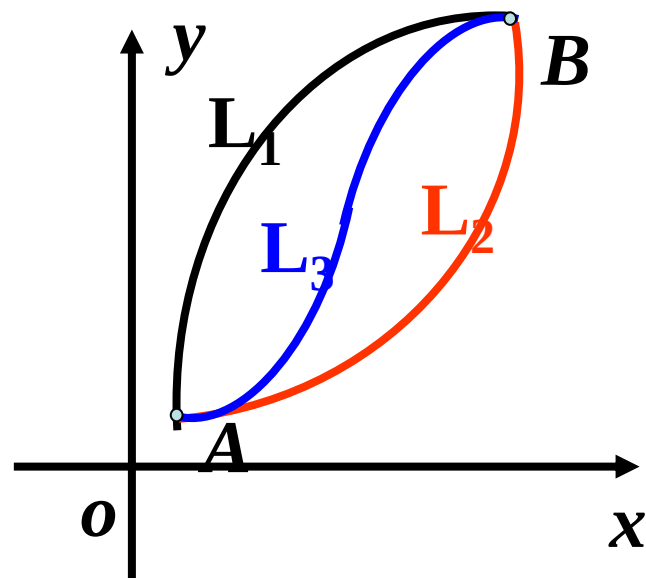
凹凸与拐点

数学教研室



前面我们介绍了函数的单调性和极值，这对于了解函数的性态很有帮助，但仅知道单调性还不能比较全面地反映出曲线的性状，还须要考虑弯曲方向。

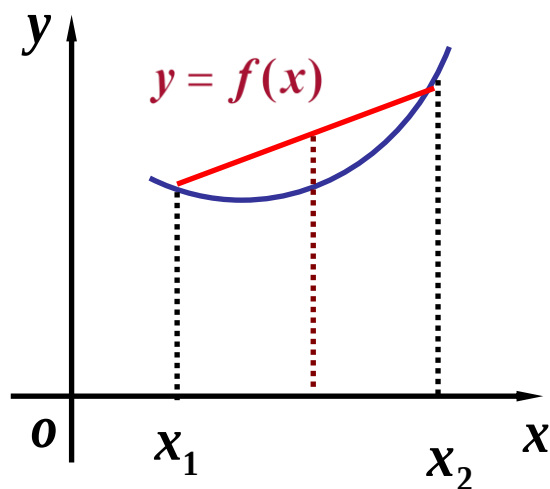
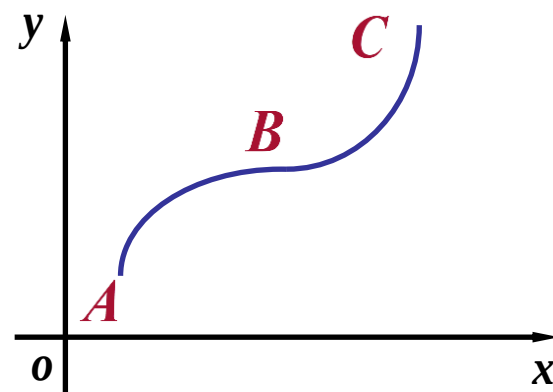
如右图所示 L_1 ， L_2 ， L_3 虽然都是从A点单调上升到B点，但它们的弯曲方向却不一样。



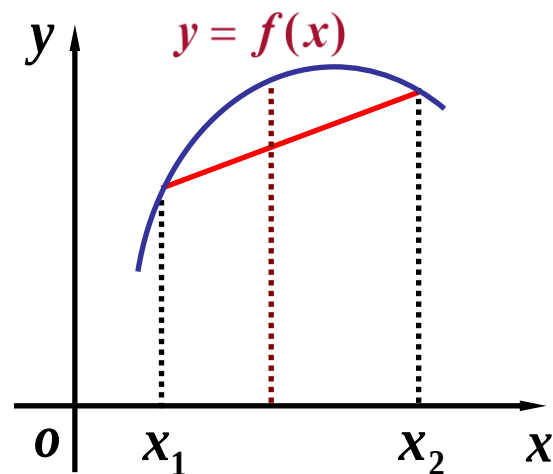
L_1 是“凸”弧， L_2 是“凹”弧， L_3 既有凸弧，也有凹弧，这和我们日常习惯对凹凸的称呼是一致的。

一、曲线凹凸的定义

问题:如何研究曲线的弯曲方向?



图形上任意弧段位于所张弦的下方



图形上任意弧段位于所张弦的上方

定义 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 如果对 (a,b) 内任意

两点 x_1, x_2 , 恒有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$,

那末称 $f(x)$ 在 (a,b) 内的图形是凹的;

如果对 (a,b) 内任意两点 x_1, x_2 , 恒有

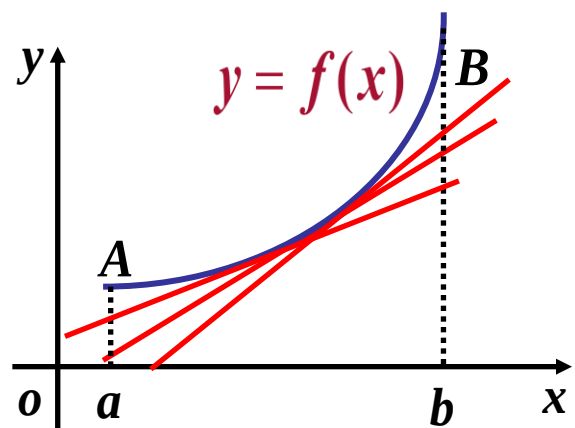
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

那末称 $f(x)$ 在 (a,b) 内的图形是凸的;

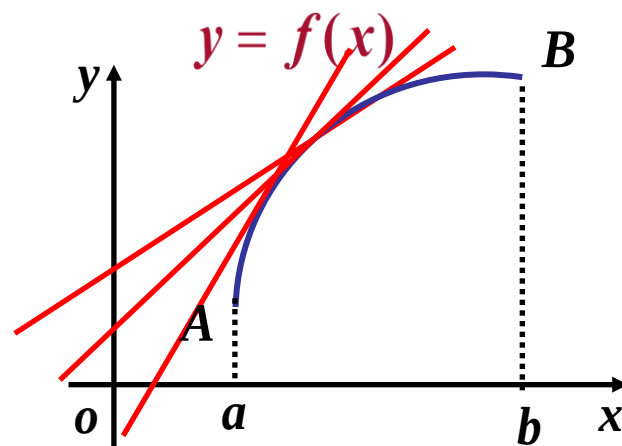
如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续, 且在 (a,b) 内的图形是凹

(或凸)的, 那末称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的图形是凹(或凸)的;

二、曲线凹凸的判定



$f'(x)$ 递增 $y'' > 0$



$f'(x)$ 递减 $y'' < 0$

定理1 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 若在 (a, b) 内

- (1) $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;
- (2) $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

证明 (2) $\forall x_1, x_2 \in (a, b), \quad x_1 < x_2$

$$\text{记 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, h = x_0 - x_1 = x_2 - x_0$$

对 $f(x)$ 在 $[x_1, x_0], [x_0, x_2]$ 上 分别应用L—定理, 得

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)h \quad (x_1 < \xi_1 < x_0)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)h \quad (x_0 < \xi_2 < x_2)$$

两式相减, 得

$$2f(x_0) - [f(x_1) + f(x_2)] = [f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]h$$

由假设 $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调减

$$\begin{aligned} & \text{由 } \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) - f'(\xi_2) > 0 \\ & \Rightarrow 2f(x_0) - [f(x_1) + f(x_2)] > 0 \end{aligned}$$

$$\text{即 } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

这就证明了 $f(x)$ 在 (a, b) 内是上凸的

同理可证 (1)

注 定理的结论可推广到任意区间上

例1 判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

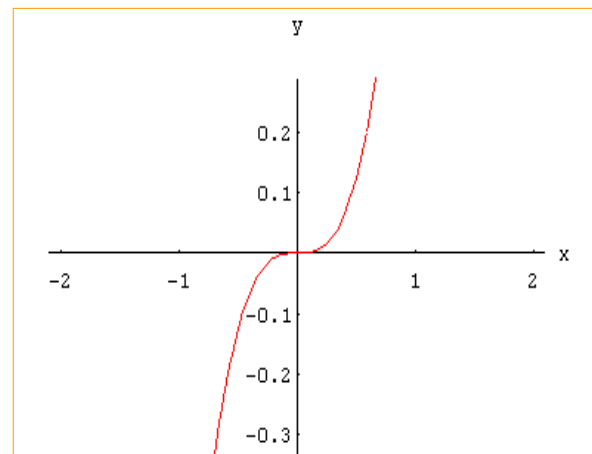
解 $\because y' = 3x^2, y'' = 6x,$

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0,$

$\therefore$ 曲线在 $(-\infty, 0]$ 为凸的;

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0, \therefore$ 曲线在 $[0, +\infty)$ 为凹的;

注意到, 点 $(0, 0)$ 是曲线由凸变凹的分界点.



三、曲线的拐点及其求法

1. 定义

连续曲线上凹凸的分界点称为曲线的拐点.

注意:拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

2. 拐点的求法

定理 2 如果 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内存在二阶导数, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$.

证 $\because f(x)$ 二阶可导, $\therefore f'(x)$ 存在且连续,

又 $\because (x_0, f(x_0))$ 是拐点,

则 $f''(x) = [f'(x)]'$ 在 x_0 两边变号,

$\therefore f'(x)$ 在 x_0 取得极值, 由可导函数取得极值的条件,

$\therefore f''(x) = 0$.

方法1: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导,

且 $f''(x_0) = 0$,

(1) x_0 两近旁 $f''(x)$ 变号, 点 $(x_0, f(x_0))$ 即为拐点;

(2) x_0 两近旁 $f''(x)$ 不变号, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

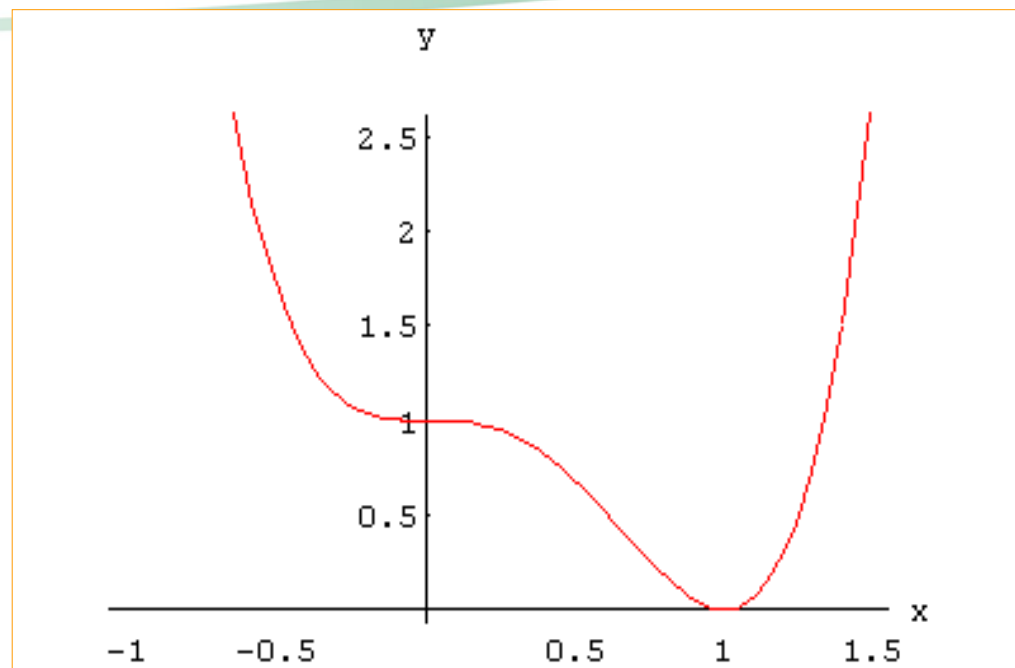
例2 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 $\because D: (-\infty, +\infty)$

$$y' = 12x^3 - 12x^2, \quad y'' = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

$$\text{令 } y'' = 0, \quad \text{得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}.$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	凹的	拐点 (0,1)	凸的	拐点 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$	凹的



凹凸区间为 $(-\infty, 0]$, $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, +\infty)$.

四、作业：求单调区间和极值、凹凸区间和拐点。

$$(1) y = x - \ln(1+x)$$

$$(2) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$(3) y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

$$(4) y = (x - 1)x^{\frac{2}{3}}$$

感谢聆听

