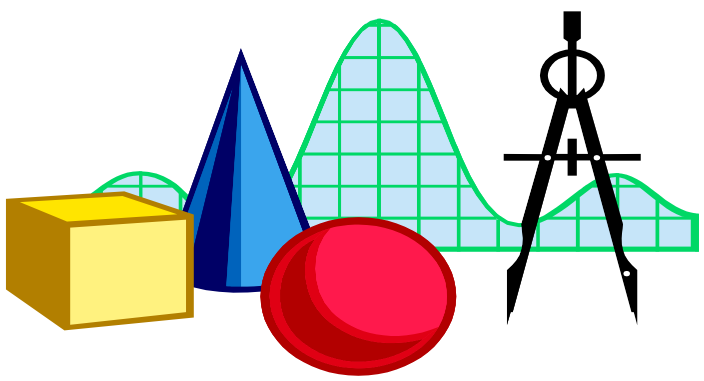
最大值与最小值

数学教研室



一、最大值、最小值问题

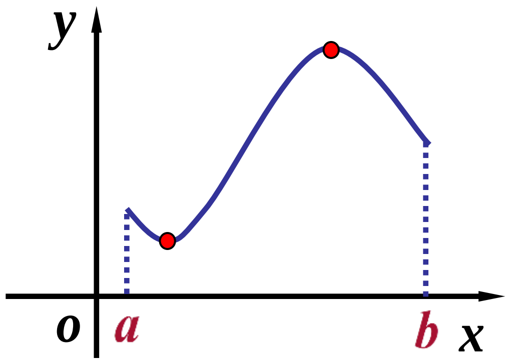
在生产实践中，为了提高经济效益，必须要考虑在一定的条件下，怎样才能是用料最省，费用最低，效率最高，收益最大等问题。这类问题在数学上统统归结为求函数的最大值或最小值问题。最值问题主要讨论问题的两个方面：最值的存在性；最值的求法。

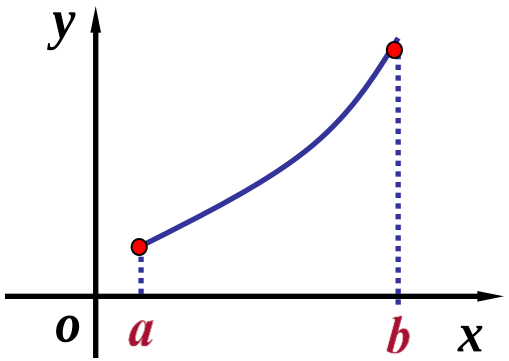
假定$f(x)$在$[a,b]$上连续，除去有限个点外处处可导，且至多有有限个点处导数为0。我们就在这样的条件下讨论$f(x)$在$[a,b]$上的最值的求法。

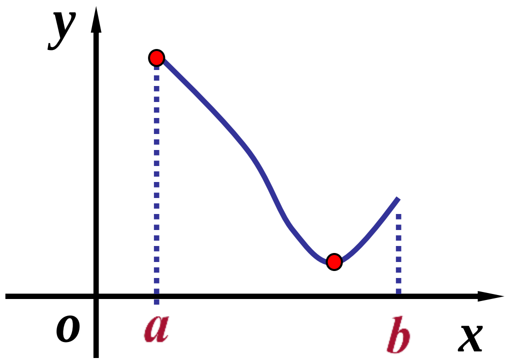
二、最值的求法

首先由闭区间上连续函数的性质$f(x)$在$[a, b]$上必存在最大值和最小值

其次，若最大值（或最小值）在开区间内取得，则这个最值一定是 极值，由假定，这个点一定是驻点或不可导点；此外最值也可能在区间的端点处取得，故求连续函数在闭区间上最值的方法是







步骤:

1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点和不可导点的函数值,
比较大小,哪个大那个就是最大值,哪个小那
个就是最小值;

$$y_{\underset{(\min)}{\max}} = \underset{(\min)}{\max}\{f(a), f(c_1), \cdots, f(c_m), f(d_1), \cdots, f(d_n), f(b)\}$$

注意: 如果区间内只有一个极值,则这个极值
就是最值.(最大值或最小值)

三、应用举例

例1 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解 $\because f'(x) = 6(x+2)(x-1)$

解方程 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2,\ x_2 = 1.$

计算 $f(-3) = 23;$ $f(-2) = 34;$

$f(1) = 7;$ $f(4) = 142;$

例2 求 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 在 $[-2,2]$ 上的最值

解 $$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(x^2-1=-x^2)$

易知，在 $x=0, x=\pm 1$ 处 $f'(x)$ 不存在

这些点处的函数值为：

这些点处的函数值为：

$$f(0)=1 \qquad f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=4^{\frac{1}{3}}$$

$$f(\pm1)=1 \qquad f(\pm2)=4^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}$$

比较以上各点处的函数值可知

$$f_{\max}=f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=4^{\frac{1}{3}}$$

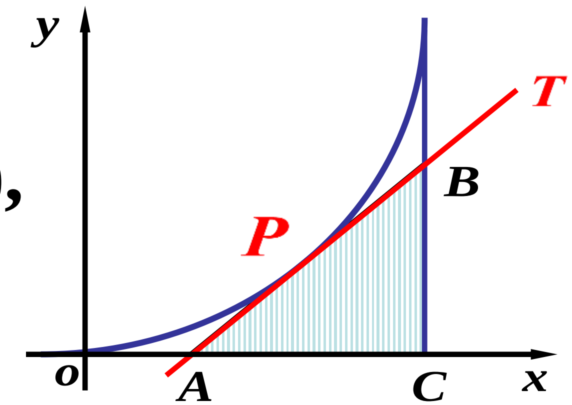
$$f_{\min}=f(\pm2)=4^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}$$

在求函数的最值时，特别值得指出的是下述情况：$f(x)$在一个区间内可导，且只有一个驻点x_0，并且这个驻点x_0同时也是 $f(x)$的极值点，则当 $f(x_0)$是极大（小）值时，$f(x_0)$是函数 $f(x)$ 在该区间上的最大（小）值。

这是因为此时在 x_0 的左、右两侧 $f'(x)$ 的符号必定相反，亦即在 x_0 的左、右两侧 $f(x)$的单调性必定相反。

例3 由直线 $y=0$，$x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在 曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线 与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形面积最 大.

解 如图,



设所求切点为$P(x_0, y_0)$,

则切线PT为

$$y-y_0=2x_0(x-x_0),$$

$\because y_0=x_0^2$, $\therefore A(\frac{1}{2}x_0,\ 0)$, $C(8,\ 0)$, $B(8,\ 16x_0-x_0^2)$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(8-\frac{1}{2}x_0)(16x_0-x_0^2)\qquad(0\le x_0\le 8)$$

令 $S'=\frac{1}{4}(3x_0^2-64x_0+16\times 16)=0,$

解得 $x_0=\frac{16}{3},\quad x_0=16$ (舍去).

$\because s''(\frac{16}{3})=-8<0.\qquad \therefore s(\frac{16}{3})=\frac{4096}{27}$ 为极大值.

故 $s(\frac{16}{3})=\frac{4096}{27}$ 为所有三角形中面积的 最大者.

四、作业：求最值

$(1)\ y = x^4 - 8x^2 + 2 \qquad x \in [-1, 3]$

$(2)\ y = x + \sqrt{1 - x} \qquad x \in [-5, 1]$


感谢聆听