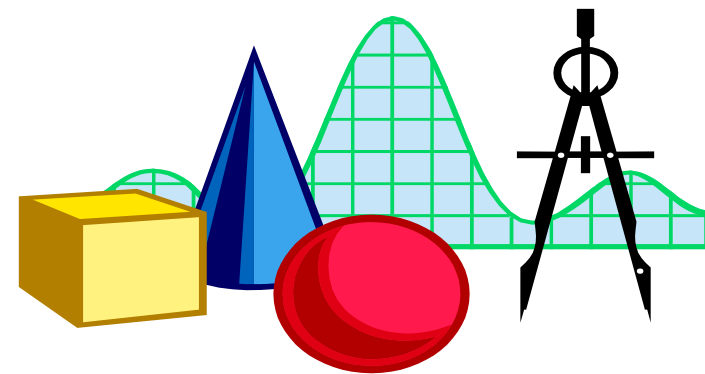


单调与极值

数学教研室

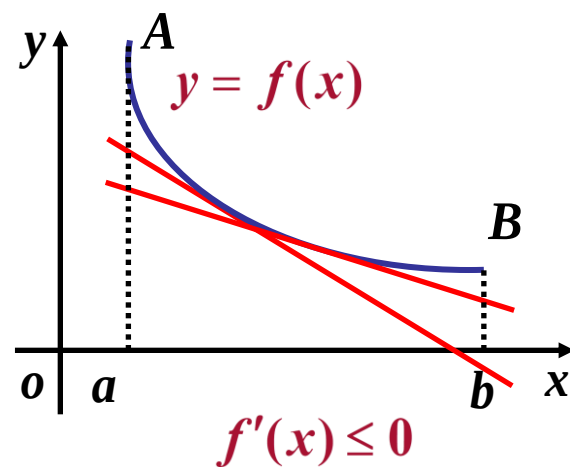
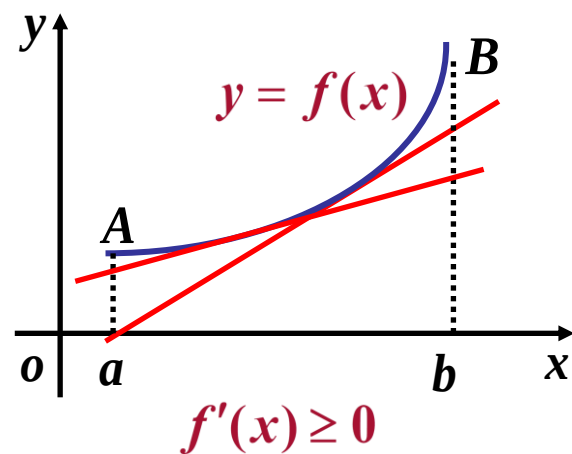


Lagrange定理 $\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$ 给出了

函数在某区间上的增量与函数在区间内某点处的导数之间的关系，为利用导数反过来研究函数的性质或曲线的形态提供了一座桥梁。本节我们就来讨论这方面的问题，主要介绍：单调性、极值最值、凹凸、拐点和渐近线等。

一、单调性的判别法

函数在某区间上是否具有单调性是我们研究函数的性态时，首先关注的问题。第一章中已经给出了函数在某区间上单调的定义，但利用定义来判定函数的单调性却是很不方便的。



从几何图形上看，表示单调函数的曲线当自变量在单调区间内按增加方向变动时，曲线总是上升（下降）的。进一步若曲线在某区间内每点处的切线斜率都为正（负），即切线的倾角全为锐（钝）角，曲线就是上升（下降）的。

这就启示我们：能否利用导数的符号来判定单调性？回答是肯定的。

定理 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ，那末函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加；(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$ ，那末函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少。

证 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 应用拉氏定理, 得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

$$\because x_2 - x_1 > 0,$$

若在 (a, b) 内, $f'(x) > 0$, 则 $f'(\xi) > 0$,

$\therefore f(x_2) > f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加.

若在 (a, b) 内, $f'(x) < 0$, 则 $f'(\xi) < 0$,

$\therefore f(x_2) < f(x_1)$. $\therefore y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

注 ①若在 (a,b) 内至多有有限个导数等0的点和至多有有限个不可导点，而在其余点处均有

$f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) 则由连续性，结论仍成立

②此判定法则对其它各种类型的区间仍适用

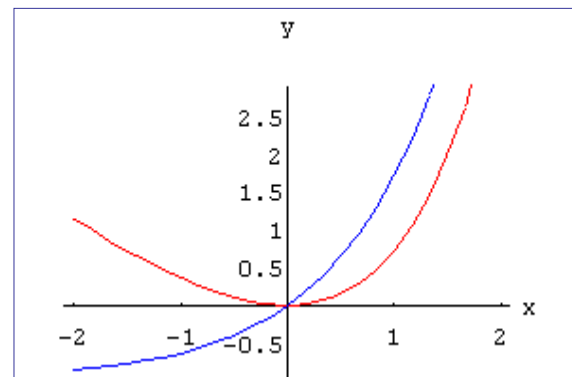
例1 讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $\because y' = e^x - 1$. 又 $\because D: (-\infty, +\infty)$.

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y' < 0$,

$\therefore$ 函数单调减少;

在 $(0, +\infty)$ 内, $y' > 0$, $\therefore$ 函数单调增加.



注意:函数的单调性是一个区间上的性质, 要用导数在这一区间上的符号来判定, 而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

单调区间求法

问题:如上例, 函数在定义区间上不是单调的, 但在各个部分区间上单调.

定义:若函数在其定义域的某个区间内是单调的, 则该区间称为函数的单调区间.

导数等于零的点和不可导点, 可能是单调区间的分界点.

方法:用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间, 然后判断区间内导数的符号.

例2 确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解 $\because D: (-\infty, +\infty)$.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

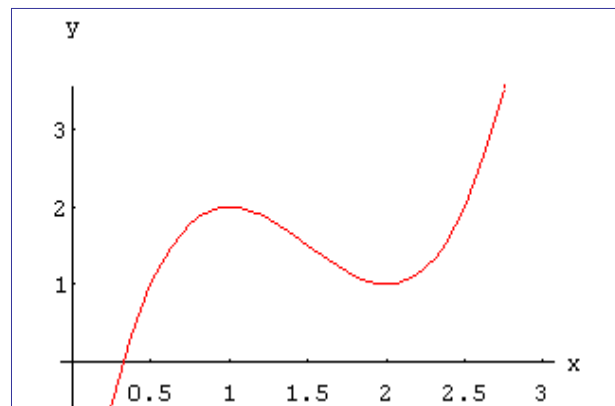
解方程 $f'(x) = 0$ 得, $x_1 = 1, x_2 = 2$.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调增加;

当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore$ 在 $[1, 2]$ 上单调减少;

当 $2 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调增加;

单调区间为 $(-\infty, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty)$.

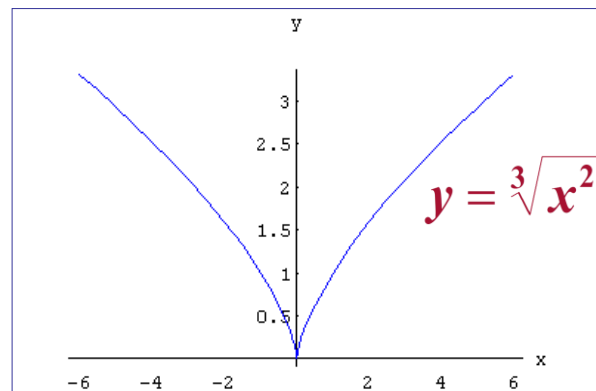


例3 确定函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 $\because D: (-\infty, +\infty).$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad (x \neq 0)$$

当 $x = 0$ 时, 导数不存在.



当 $-\infty < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少;

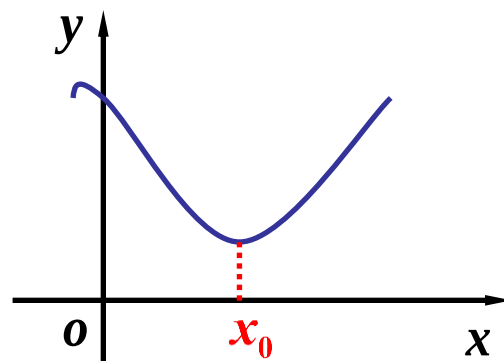
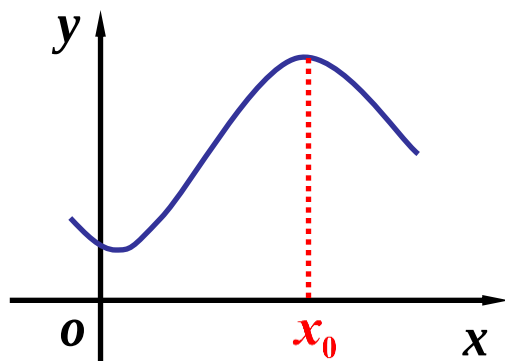
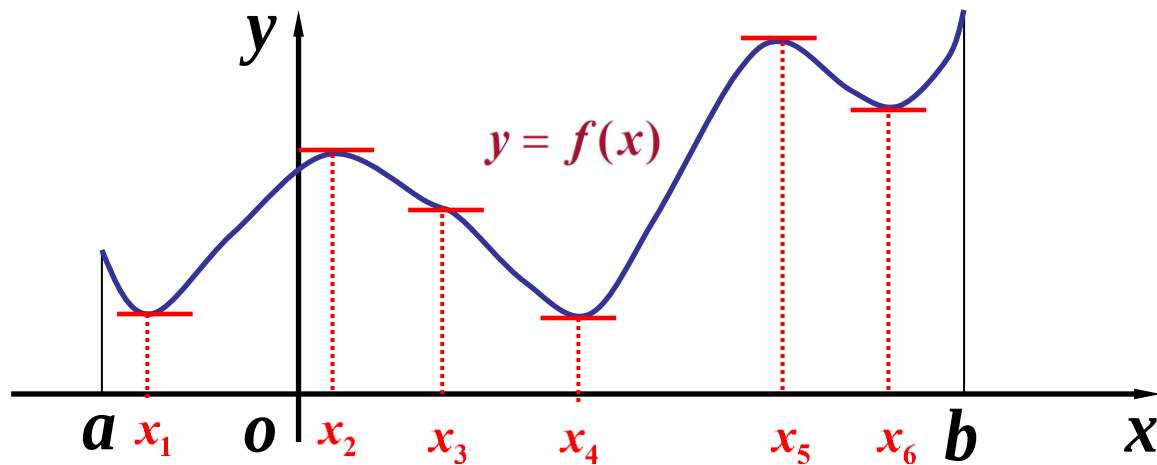
当 $0 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加;

单调区间为 $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$.

二、函数的极值及其求法

由单调性的判定法则，结合函数的图形可知，曲线在升、降转折点处形成“峰”、“谷”，函数在这些点处的函数值大于或小于两侧附近各点处的函数值。函数的这种性态以及这种点，无论在理论上还是在实际应用上都具有重要的意义，值得我们作一般性的讨论。

函数极值的定义



定义 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, x_0 是 (a,b) 内的一个点,

如果存在着点 x_0 的一个邻域,对于这邻域内的任何点 x ,除了点 x_0 外, $f(x) < f(x_0)$ 均成立,就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值;

如果存在着点 x_0 的一个邻域,对于这邻域内的任何点 x ,除了点 x_0 外, $f(x) > f(x_0)$ 均成立,就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

函数极值的求法

定理1 (必要条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数, 且在 x_0 处取得极值, 那末必定 $f'(x_0) = 0$.

定义 使导数为零的点(即方程 $f'(x) = 0$ 的实根)叫做函数 $f(x)$ 的驻点.

注意: 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点, 但函数的驻点却不一定是极值点.

例如, $y = x^3$, $y'|_{x=0} = 0$, 但 $x = 0$ 不是极值点.

注 ①这个结论又称为**Fermat**定理

②如果一个可导函数在所论区间上没有驻点
则此函数没有极值，此时导数不改变符号

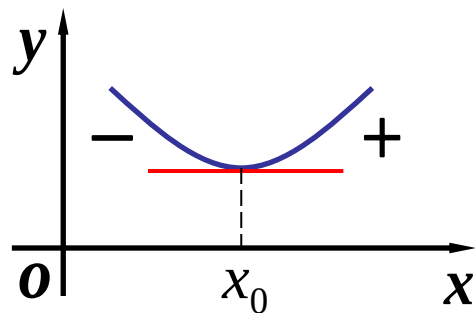
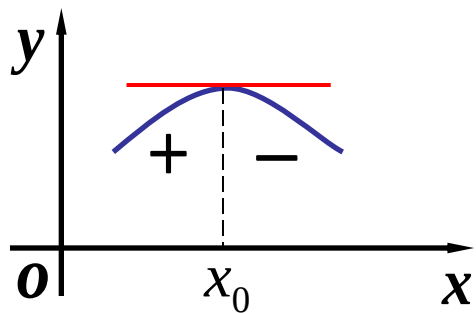
③不可导点也可能是极值点

可疑极值点：驻点、不可导点

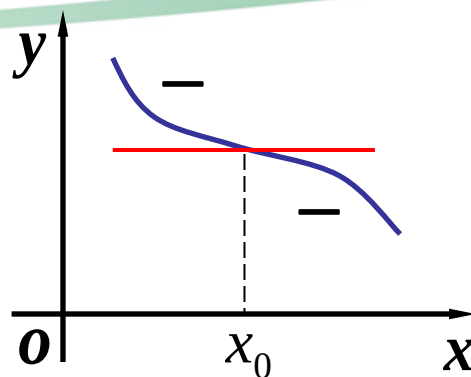
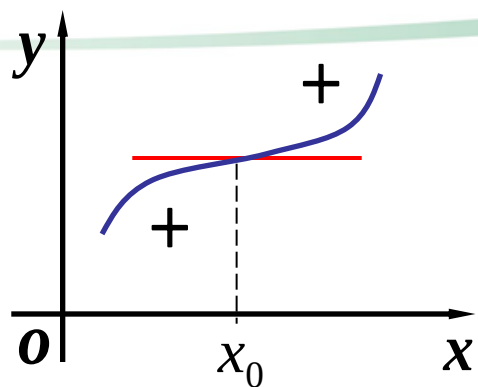
可疑极值点是否是真正的极值点，还须进一步判明。由单调性判定法则知，若可疑极值点的左、右两侧邻近，导数分别保持一定的符号，则问题即可得到解决。

定理2 (第一充分条件)

- (1) 如果 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有 $f'(x) > 0$; 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.
- (2) 如果 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有 $f'(x) < 0$; 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.
- (3) 如果当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 及 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x)$ 符号相同, 则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.



(是极值点情形)



(不是极值点情形)

求极值的步骤:

- (1) 求导数 $f'(x)$;
- (2) 求驻点(即方程 $f'(x)=0$ 的根)和不可导点
- (3) 检查 $f'(x)$ 在驻点左右的正负号,判断极值点;
- (4) 求极值.

例4 求出函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的极值.

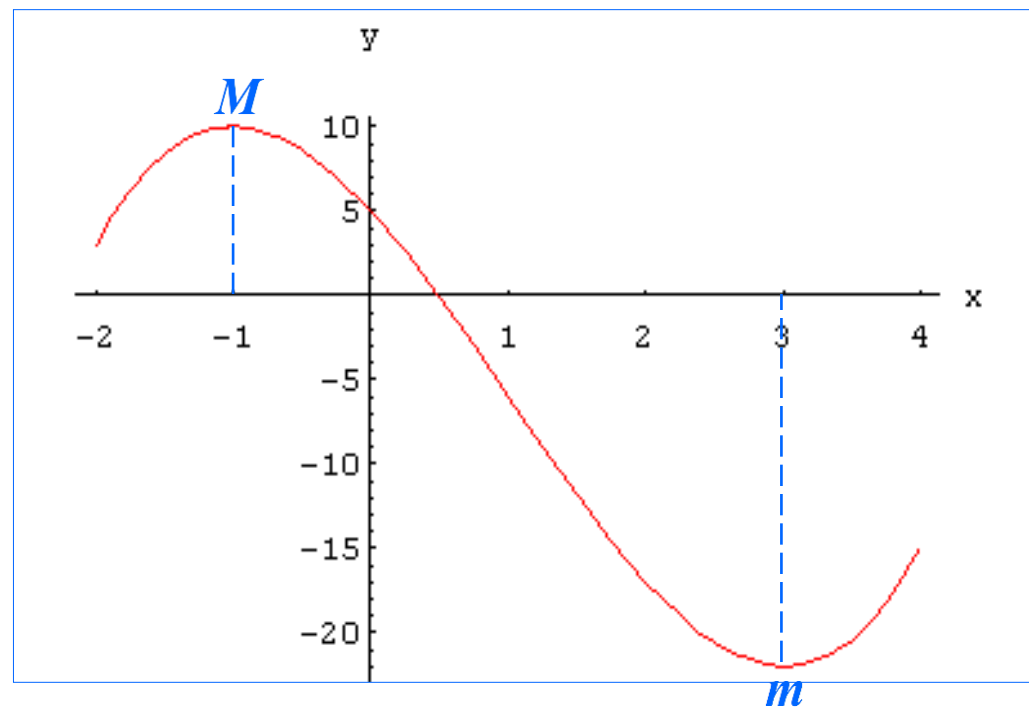
解 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$. 列表讨论

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

极大值 $f(-1) = 10$, 极小值 $f(3) = -22$.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 图形如下



定理3(第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数,
且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 那末

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

证 (1) $\because f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} < 0,$

故 $f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)$ 与 Δx 异号,

当 $\Delta x < 0$ 时, 有 $f'(x_0 + \Delta x) > f'(x_0) = 0,$

当 $\Delta x > 0$ 时, 有 $f'(x_0 + \Delta x) < f'(x_0) = 0,$

所以, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

例5 求出函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$ 的极值.

解 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$

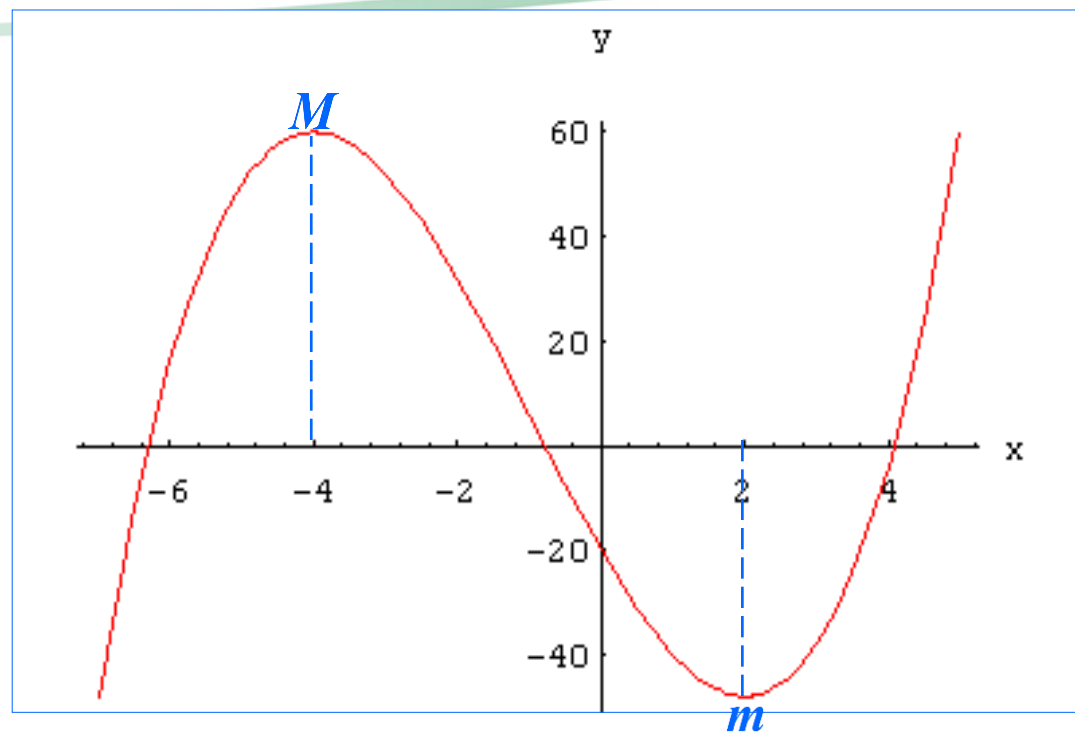
令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

$$\because f''(x) = 6x + 6,$$

$$\because f''(-4) = -18 < 0, \quad \text{故极大值 } f(-4) = 60,$$

$$f''(2) = 18 > 0, \quad \text{故极小值 } f(2) = -48.$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$ 图形如下



注意： $f''(x_0) = 0$ 时， $f(x)$ 在点 x_0 处不一定取极值，
仍用定理2.

注意:函数的不可导点,也可能是函数的极值点.

例6 求出函数 $f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

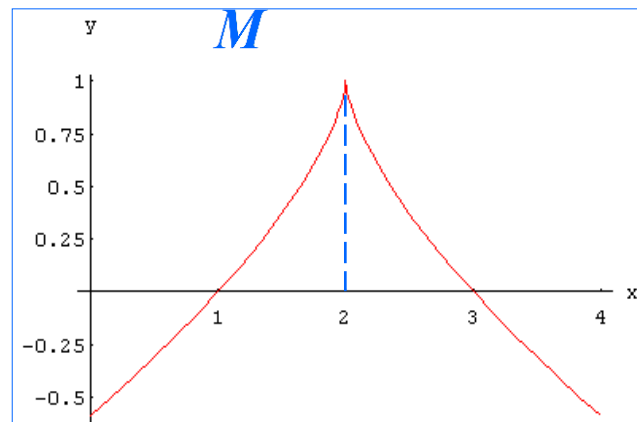
解
$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x - 2)^{-\frac{1}{3}} \quad (x \neq 2)$$

当 $x = 2$ 时, $f'(x)$ 不存在. 但函数 $f(x)$ 在该点连续.

当 $x < 2$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(2) = 1$ 为 $f(x)$ 的极大值.



三、作业：求单调区间和极值

$$(1) y = x - \ln(1+x)$$

$$(2) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$(3) y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

$$(4) y = (x - 1)x^{\frac{2}{3}}$$

感谢聆听

