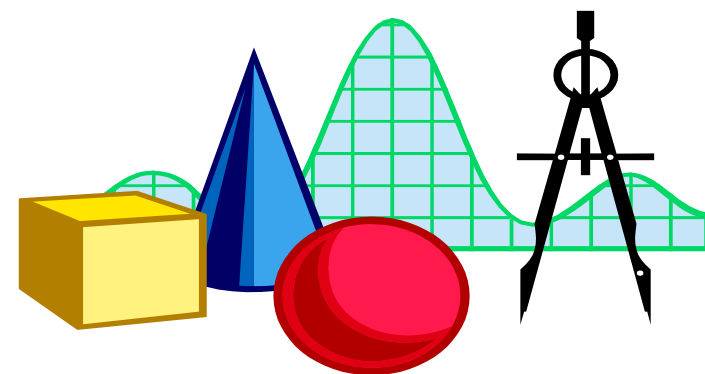


洛必达法则

数学教研室



一、L.Hospital 法则

在第一章中我们已经知道，当分子分母都是无穷小或都是无穷大时，两个函数之比的极限可能存在也可能不存在，即使极限存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一运算法则。这种极限称为未定式 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

本节我们就利用Cauchy中值定理来建立求未定式极限的L.Hospital法则，利用这一法则，可以直接求

$\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 这两种基本未定式的极限，也可间接求出

$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ 等其它类型的未定式的极限

1、 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式解法:洛必达法则

定义 如果当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$)时,两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大,那末极限

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$ 称为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \left(\frac{0}{0} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}, \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

定理 设(1)当 $x \rightarrow a$ 时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;
(2) 在 a 点的某领域内(点 a 本身可以除外), $f'(x)$
及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;
(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

$$\text{那末 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

定义 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

注 ①定理的条件：分子分母都是无穷小；分子分母都可导，且分母的导数不等于0；导数之比的极限存在或为 ∞

②定理的结论：函数之比的极限等于导数之比的极限

③若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是未定式，且 $f'(x), g'(x)$ 满足定理中对 $f(x), g(x)$ 所要求的条件，则可继续使用法则，直到不再是未定式为止

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

关于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，有下述定理

定理 设 $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

(2) $f(x), g(x)$ 可导，且 $g'(x) \neq 0$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty)$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty)$$

将 $x \rightarrow x_0$ 换成 $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty,$
 $x \rightarrow \infty$ 结论仍成立

例1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$. $\left(\frac{0}{0}\right)$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{例2 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \left(\frac{0}{0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2\end{aligned}$$

注 在反复使用法则时，要时刻注意检查是否为未定式，若不是未定式，不可使用法则。

例3 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$. $(\frac{0}{0})$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$. $(\frac{\infty}{\infty})$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax \cdot \sin bx}{b \cos bx \cdot \sin ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax}{\cos bx} = 1.$

例5 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$. $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

解 直接应用法则比较麻烦，先变形，再用法则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin 3x} \cdot \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = 3 \end{aligned}$$

例6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{e^x - 1}$ $\left(\frac{0}{0} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{e^x}$$

分母 $\rightarrow 1$ ，分子振荡而没有极限L.Hospital法则“失效”

$$\text{但 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \times 0 = 0$$

注 分式中出现

$x \rightarrow \infty$ 时, $\sin x, \cos x$ 或 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$
时，不能使用**L.Hospital**法则

例7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}.$$

注意：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法——尤其是等价无穷小的代换——结合使用，可以简化运算过程，效果会更好，使用起来也更有效。

2.作业：利用洛必达法则求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi}}{x - 2 \arctan x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 2x)}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

二、 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式解法

关键: 通过适当的恒等变形将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$.

仍可使用L.Hospital法则来求极限

1. $0 \cdot \infty$ 型

步骤: $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{1}{\infty} \cdot \infty \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$, 或 $0 \cdot \infty \Rightarrow 0 \cdot \frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0}{0}$.

即将其中之一因子下放至分母就可转化为

$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

例8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

注意：对数因子不下放，要放在分子上

2. $\infty - \infty$ 型

步骤： $\infty - \infty \Rightarrow \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0 \cdot 0}$.

例9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$. ($\infty - \infty$)

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x}$$

$$= 0.$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤: $\left. \begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{ \begin{matrix} 0 \cdot \ln 0 \\ \infty \cdot \ln 1 \\ 0 \cdot \ln \infty \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0 \cdot \infty.$

例10 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. (0^0)

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

例11 求 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^∞)

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}.$

例12 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解 取对数得 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\cot x)}$,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\cot x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\cot x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\cos x \cdot \sin x} = -1, \quad \therefore \text{原式} = e^{-1}.$$

例13 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x}$.

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \sin x)$.

极限不存在

洛必达法则失效。

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \cos x\right) = 1.$$

注意：洛必达法则的使用条件。

几点说明

① L.Hospital法则只是求未定式极限的一种有效方法，是充分条件，当定理的条件满足时，所求的极限存在或为 ∞ ，当定理的条件不满足时，主要是指（3）不成立，即导数之比的极限不易求出，或不存在但不 ∞ ，函数之比的极限未必不存在，此时L.Hospital法则：“失效”

$x \rightarrow \infty$ 时, $\sin x, \cos x$ 或 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$

不能使用洛必达法则

② L.Hospital法则只能对 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 这两种基本未定式

才可直接应用，其它类型的未定式必须先转化

- ③ **L.Hospital**法则与等价无穷小的代换结合使用效果会更好
- ④ 使用**L.Hospital**法则前宜先行约去可约因子，特别是极限不为0的因子，宜将确定后的极限值提到极限号外，以简化计算（这相当于提前使用了一次乘积极限的运算法则）
- ⑤ 可考虑进行恒等变形或引入适当的变量代换，以简化计算



作业：利用洛必达法则求极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2 \right) x^2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$$

感谢聆听

