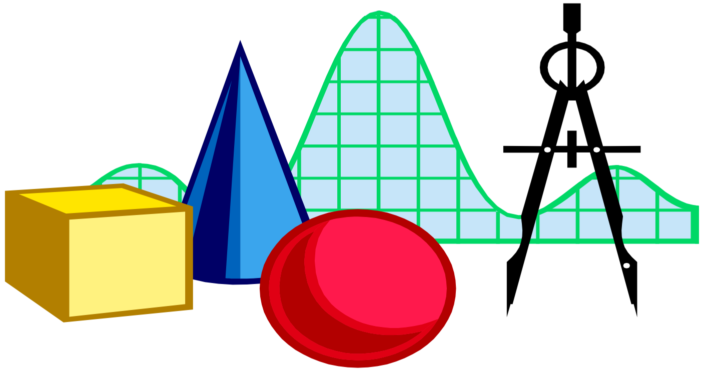
中值定理

数学教研室



第二章我们讨论了微分法，解决了曲线的切线、法线及有关变化率问题。这一章我们来讨论导数的应用问题。

我们知道，函数 $y=f(x)$ 在区间 $<x_0,x_0+\Delta x>$ 上的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可用它的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 来近似计算 其误差是比 Δx 高阶的无穷小

即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\approx f'(x_0)$ 是近似关系 $(|\Delta x|$充分小)

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$是极限关系,都不便应用

我们的任务是寻求差商与导数的直接关系，既不是极限关系，也不是近似关系。对此，**Lagrange**中值定理给出了圆满的解答:

$$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

——导数应用的理论基础

本章我们先给出**Rolle**定理（它是**Lagrange**定理的特殊情况），由特殊过渡到一般来证明**Lagrange**定理和**Cauchy**定理，有了**Cauchy**定理就可以给出**Taylor**中值定理及**L' Hospital**法则，这就是本章理论部分的主要内容。

理论部分结构图

Rolle定理 $\xleftarrow{\text{特例}}$ Lagrange定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Cauchy定理

一、罗尔(Rolle)定理

定理(Rolle) 若函数$f(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续

（2）在开区间(a,b)内可导

（3）在区间端点处的函数值相等$f(a)=f(b)$

则在(a,b)内至少存在一点$\xi,\xi\in(a,b)$使得函数

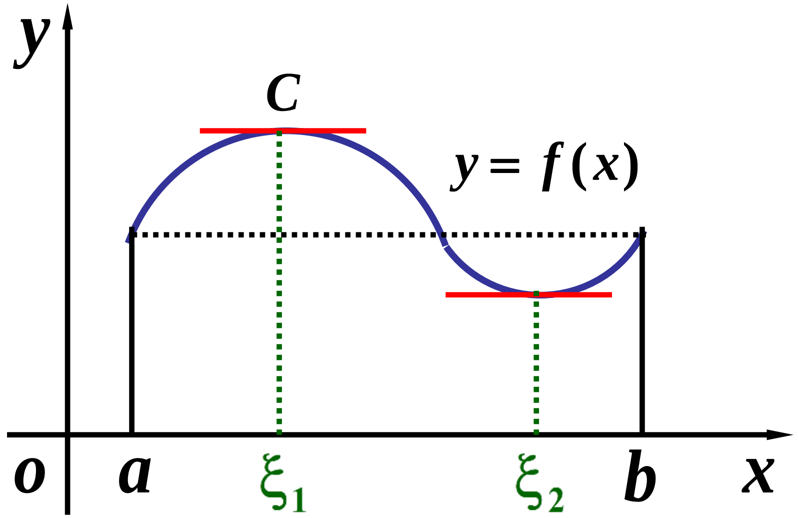
$f(x)$在该点的导数为零，即 $f'(\xi)=0$

例如，$f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

在$[-1,3]$上连续，在$(-1,3)$上可导，且 $f(-1)=f(3)=0$,

$\because f'(x)=2(x-1)$, 取$\xi=1$, $(1\in(-1,3))$ $f'(\xi)=0$.

几何解释:



若连续曲线弧的两个端点的纵坐标相等,且除去两个端点外处处有不垂直于横轴的切线,在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

拉格朗日（Lagrange）中值定理 (1)如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，(2)在开区间(a,b)内可导，那末在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式

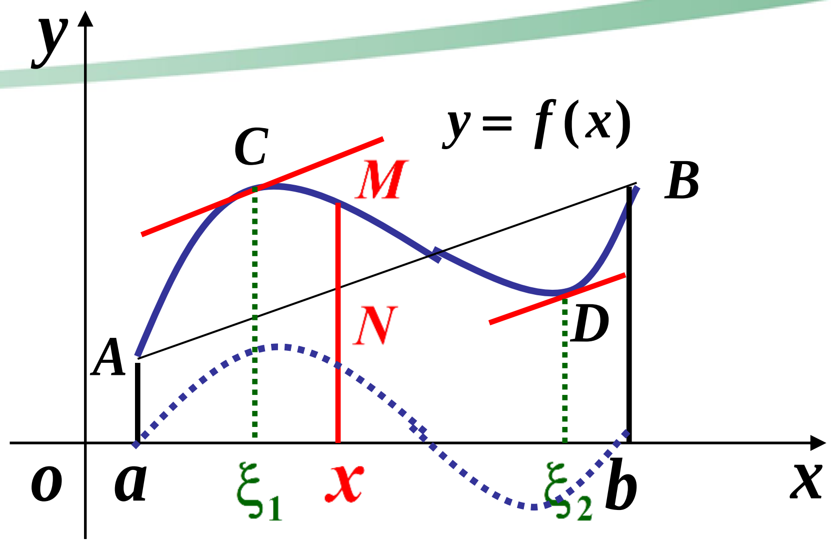
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$ 成立.

注意：与罗尔定理相比条件中去掉了 $f(a)=f(b)$.

结论亦可写成 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



证 分析: 条件中与罗尔定理相差 $f(a)=f(b)$.

弦AB方程为 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$

曲线 $f(x)$ 减去弦 AB,

所得曲线a,b两端点的函数值相等.

作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)].$$

$F(x)$ 满足罗尔定理的条件,

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $F'(\xi)=0.$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$

拉格朗日中值公式

注意:拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

设 $f(x)$在在(a,b)内可导，$x_0, x_0+\Delta x \in (a,b)$，则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

增量Δy的精确表达式.

拉格朗日中值公式又称**有限增量公式.**

微分中值定理

拉格朗日中值定理又称**有限增量定理.**

推论1 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

推论2 如果 在区间 I 上 $f'(x)=g'(x)$，那末 在区间 I 上 $f(x)=g(x)+C$

例 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ (-1 \le x \le 1).$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x \in [-1,1]$

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$$

$$\therefore f(x) \equiv C, \quad x \in [-1,1]$$

又 $\because f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$

即 $C = \frac{\pi}{2}.$

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

三、柯西(Cauchy)中值定理

柯西（Cauchy）中值定理　如果函数$f(x)$及$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$F'(x)$在(a,b)内每一点处均不为零，那末在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.


感谢聆听