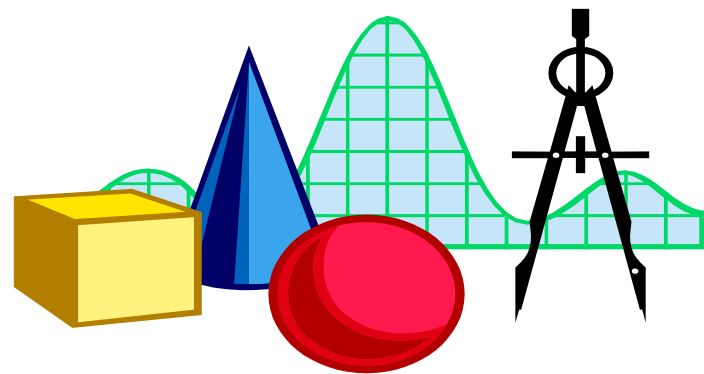


高阶导数

数学教研室



一、定义

问题:变速直线运动的加速度.

设 $s = f(t)$, 则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$

\therefore 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'$.

定义 如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导, 即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数.

记作 $f''(x)$, y'' , $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x)$, y''' , $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x)$, $y^{(4)}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$.

一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地, $f(x)$ 称为零阶导数; $f'(x)$ 称为一阶导数.

二、高阶导数求法举例

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数。

例1 设 $y = \arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解
$$y' = \frac{1}{1+x^2} \quad y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore f''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad f'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \Big|_{x=0} = -2.$$

例2 设 $y = x^\alpha$ ($\alpha \in R$), 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

.....

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (n \geq 1)$$

若 α 为自然数 n , 则

$$y^{(n)} = (x^n)^{(n)} = n!, \quad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

注意:求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(数学归纳法证明)——

逐阶求导, 寻求规律, 写出通式

例3 设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \frac{1}{1+x}$ $y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$y''' = \frac{2!}{(1+x)^3} \quad y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

.....

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1, 0! = 1)$$

例4 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

.....

$$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

2. 间接法: 利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

常用高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

三、二阶导数的作业：

$$(1) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(2) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$(3) y = (1+x^2) \arctan x$$

$$(4) y = x \ln x$$

感谢聆听

