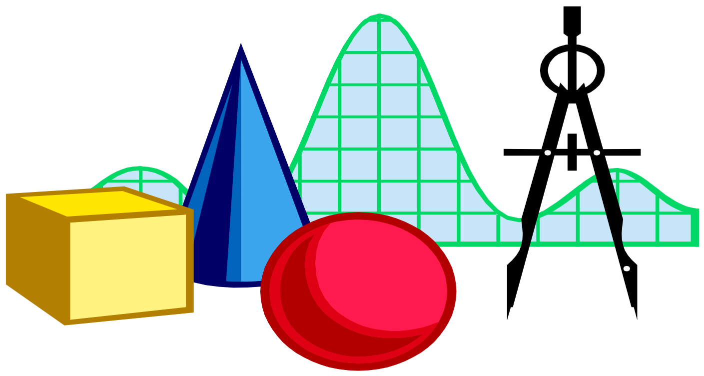
隐函数求导

数学教研室



隐函数的求导法则

定义:由方程所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \Rightarrow y = f(x)$ 隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

设$F(x,y)=0$确定了一元隐函数 $y=y(x)$

将 $y=y(x)$代入$F(x,y)=0$得

则 $\frac{du}{dx}=0$

两边对 x 求导，当遇到 y 的函数 $f(y)$时

要求的是 $\frac{d}{dx}[f(y)]$ 记 $z=f(y)$ 将求出的这些导数代入$\frac{du}{dx}=0$

$z\to y\to x$

得到关于 $\frac{dy}{dx}$ 的代数方程，

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = f'(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

解得$\frac{dy}{dx}=g(x,y)$即为所求

例1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数 y的导数 $\frac{dy}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对 x求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0$,

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

例2 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为$y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然通过原点.

例3.求隐函数的导数：

$$(1)\, y = 1 - xe^{y}$$

$$(2)\, y = \cos(x + y)$$

$$(3)\, xy = e^{x+y}$$

求隐函数的导数作业：

$$1.\ ye^{x}+\ln y=1$$

$$2.\ \arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}$$

$$3.\ y^{2}=\cos(xy)$$

感谢聆听