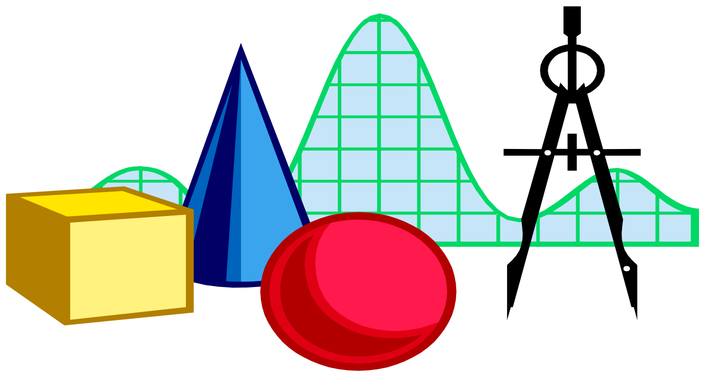
复合函数求导

数学教研室



前面我们已经会求简单函数——基本初等函数经有限次四则运算的结果——的导数，但是像

$$\ln\tan x, e^{x^2}, \sin\frac{2x}{x^2+1}$$

等函数（复合函数）是否可导，可导的话，如何求它们的导数

先看一个例子

例6 $y=(1-x^2)^2$，求y'

例1　$y=(1-x^2)^2$，求y'

$$y=(1-x^2)^2 \quad =1-2x^2+x^4 \Rightarrow \quad y'=-4x+4x^3=-4x(1-x^2)$$

这里我们是先展开，再求导，若像 $y=(1-x^2)^{1000}$ 求导数，展开就不是办法，再像 $y=\sqrt[5]{1-x^2}$ 求导数，根本无法展开，又该怎么办？

仔细分析一下，这三个函数具有同样的复合结构我们从复合函数的角度来分析一下上例的结果。

$y=(1-x^2)^2$ 是由$y=u^2$和$u=1-x^2$复合而成的

$$y'_u=2u \qquad u'_x=-2x$$

$$y'_u\cdot u'_x=2u\cdot(-2x)=-4x(1-x^2) \quad =y'_x$$

再如 $y = \sin 2x$

$$y' = (2\sin x\cos x)' = 2[(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)']$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$$

注意到 $y = \sin 2x$ $\quad y = \sin u, u = 2x$

$$y'_u = \cos u \quad u'_x = 2$$

$$y'_u \cdot u'_x = 2\cos u = 2\cos 2x = y'_x$$

由以上两例可见：由 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 复合而成的函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数 y'_x 恰好等于 y 对中间变量 u 的导数 y'_u 与中间变量 u 对自变量 x 的导数 u'_x 的乘积

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$ ——这就是**链式法则**

定理 如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即 因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

若$u=\varphi(x)$在I上可导，$y=f(u)$在I_1上可导

$\forall x\in I, u=\varphi(x)\in I_1$，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$

在I上可导，且有$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

注

1.链式法则——“由外向里，逐层求导”

2.注意中间变量

推广 设 $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$,

则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

例2 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $\because y=\ln u, u=\sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad=\frac{1}{u}\cdot\cos x\quad=\frac{\cos x}{\sin x}\quad=\cot x$$

例3 求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数 .

解 $\dfrac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'$

$$=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

例4 求函数 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$ 的导数 . $(a>0)$

解 $y'=(\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a})'$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

例5 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\,(x>2)$ 的导数.

解 $\because\ y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2),$

$$\therefore\ y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

例6 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解 $$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

注

1.基本初等函数的导数公式和上述求导法则是初等函数求导运算的基础，必须熟练掌握

2.复合函数求导的链式法则是一元函数微分学的理论基础和精神支柱，要深刻理解，熟练应用——注意不要漏层

3.对于分段函数求导问题：在定义域的各个部分区间内部，仍按初等函数的求导法则处理，在分界点处须用导数的定义仔细分析，即分别求出在各分界点处的左、右导数，然后确定导数是否存在。

求下列复合函数的导数：

$$(1)\ f(x)=(2x^2-3)^2 \qquad (2)\ f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(3)\ f(x)=\arccos\frac{1}{x} \qquad (4)\ f(x)=\sin\sqrt{1+x^2}$$

$$(5)\ y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right),\ f'(x)=\arcsin x^2,\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$$


感谢聆听