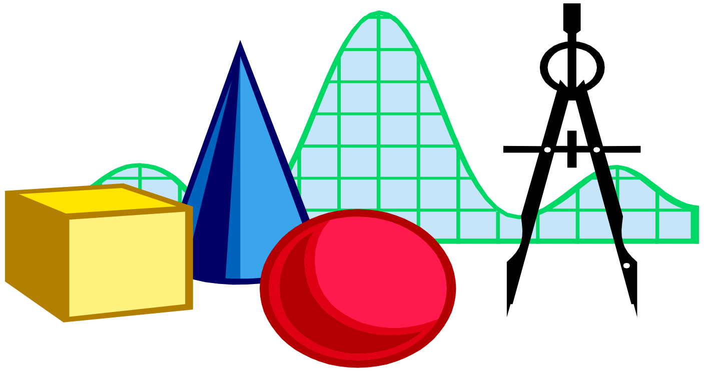
导数的计算

数学教研室



一、由定义求导数（三步法）

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0.$

即 $(C)' = 0.$

例2 设函数 $f(x)=\sin x$,求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x.$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例3 求函数 $y=x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $(x^n)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}]=nx^{n-1}$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

更一般地 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$. $(\mu\in R)$

例如, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\dfrac{1}{x^2}$.

例4 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} \quad =\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

即 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

特别地 $$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

二、函数四则运算的求导法则

定理 如果函数$u(x)$，$v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导，并且

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

(2) $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(3) $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$.

注 ①（1）即是和、差的导数等于导数的和、差

（2）即是乘积的导数等于第一个因子的导数乘以第二个因子再加上第一个因子乘以第二个因子的导数

（3）即是商的导数等于分子的导数乘以分母减去分子乘以分母的导数，再除以分母的平方

②（1）可推广到任意有限个可导函数的情形

$$[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$$

③（2）也可推广到任意有限个函数的情形

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)]' = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$$

$$+\cdots+ f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_i'(x)f_k(x);$$

④　作为（2）的特殊情况

若$v=c$，则$(cu)'=cu'$　或　$[Cf(x)]'=Cf'(x)$;

即常数因子可以提到导数符号的外面

$$[\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i'(x)$$

即线性组合的导数等于导数的线性组合

——说明求导是一线性运算

⑤作为（3）的一种特殊情况，

$$若\boldsymbol{u}=1, 则\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$$

三、例题分析

例1 求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数．

解 $y'=3x^2-4x+\cos x.$

例2　求 $y=\sin 2x\cdot\ln x$ 的导数．

解　$\because y=2\sin x\cdot\cos x\cdot\ln x$

$$y'=2\cos x\cdot\cos x\cdot\ln x+2\sin x\cdot(-\sin x)\cdot\ln x$$

$$+2\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=2\cos 2x\ln x+\frac{1}{x}\sin 2x.$$

例3 求 $y=\tan x$ 的导数 .

解 $$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例4　$y=\sec x$　求y'

解　$y'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$$

同理可得

$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$$

四、利用四则运算求导数的作业：

$$1.\ f(x)=\frac{5}{x\sqrt{x}}-2^{x}+3\log_{2}x$$

$$2.\ f(x)=\frac{1}{2}x^{3}\cos x\ln x$$

$$3.\ f(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos x}$$

$$4.\ f(x)=x\tan x-2\sec x$$

$$5.\ f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

五、反函数的导数

定理 如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

即 **反函数的导数等于直接函数导数的倒数.**

例1 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because x=\sin y$ 在 $I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)'=\cos y>0$, $\quad\therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\qquad(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$


感谢聆听