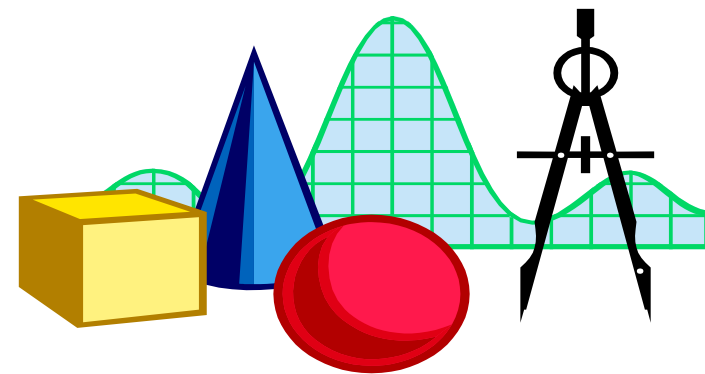


导数

数学教研室



一、导数的概念

在许多实际问题中，需要从数量上研究变量的变化速度。如物体的运动速度，电流强度，线密度，比热，化学反应速度及生物繁殖率等，所有这些在数学上都可归结为函数的变化率问题，即导数。

本章将通过在实际问题的分析，引出微分学中两个最重要的基本概念——导数与微分，然后再建立求导数与微分的运算公式和法则，从而解决有关变化率的计算问题。

实例

1. 自由落体运动的瞬时速度问题

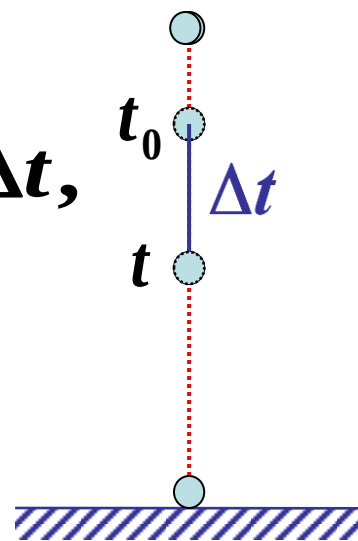
如图，求 t_0 时刻的瞬时速度，

取一邻近于 t_0 的时刻 t ，运动时间 Δt ，

$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{g}{2}(t_0 + t).$$

当 $t \rightarrow t_0$ 时，取极限得

$$\text{瞬时速度 } v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t_0 + t)}{2} = gt_0.$$



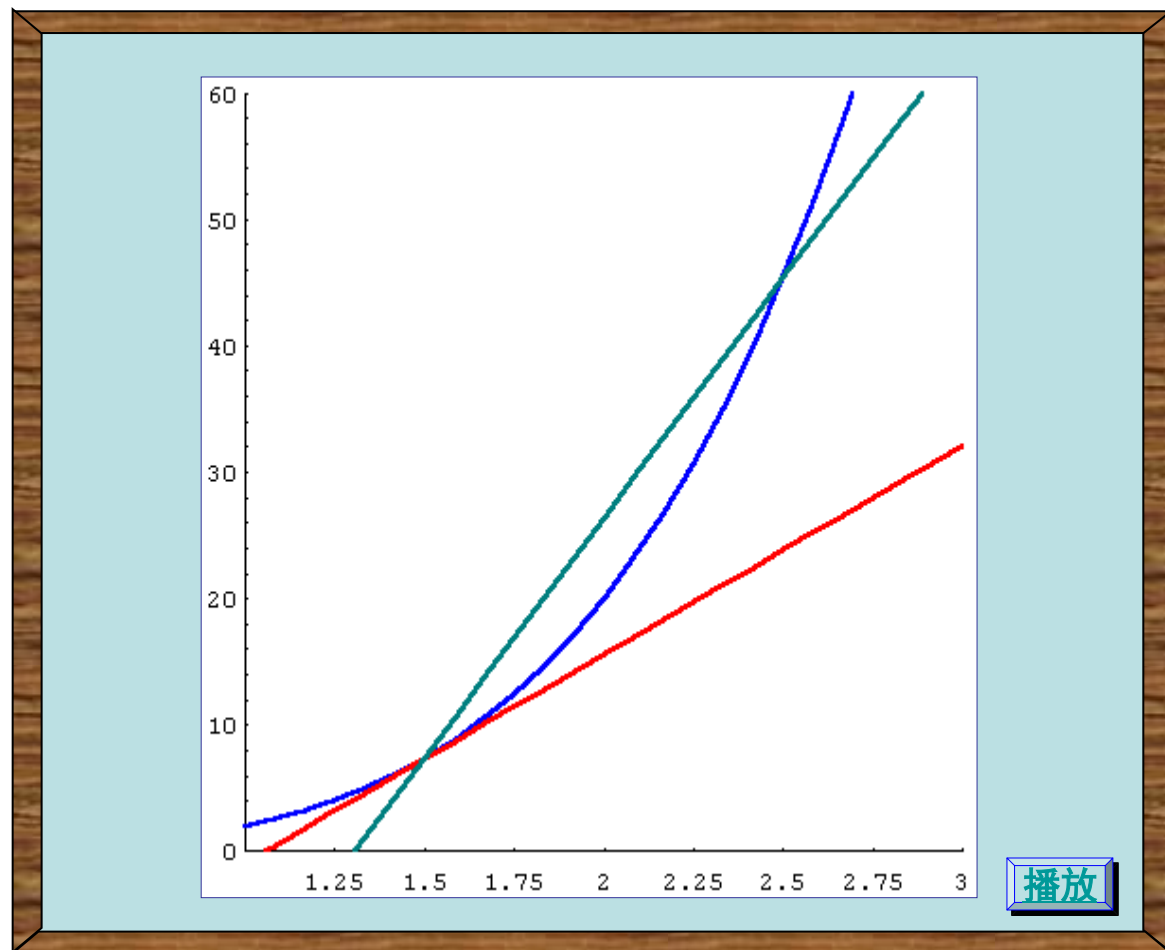
上述求瞬时速度的方法对一般变速直线运动也同样适用。设物体作变速直线运动，其运动路程为 $s = s(t)$ ，则物体在时刻 t_0 的瞬时速度定义为

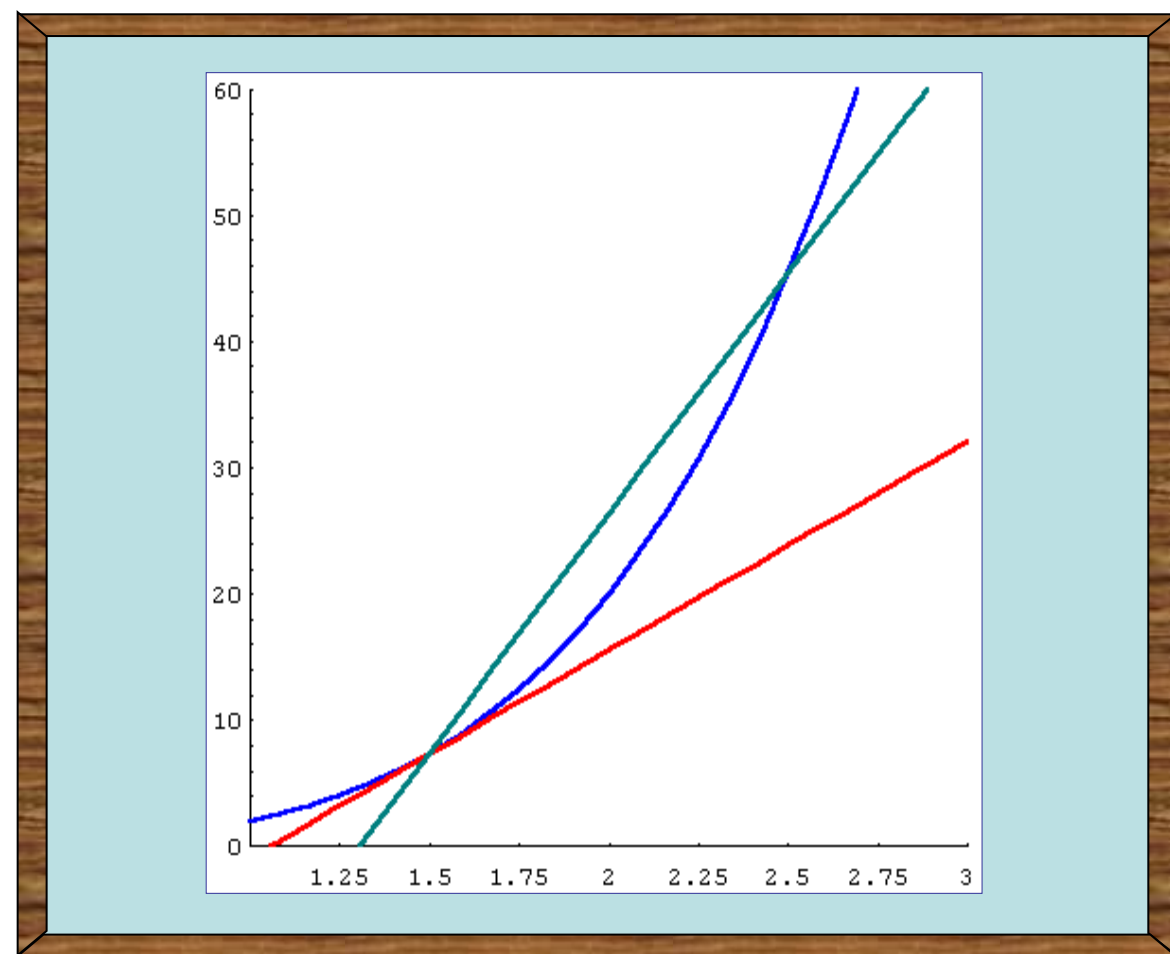
$$\begin{aligned} v(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \end{aligned}$$

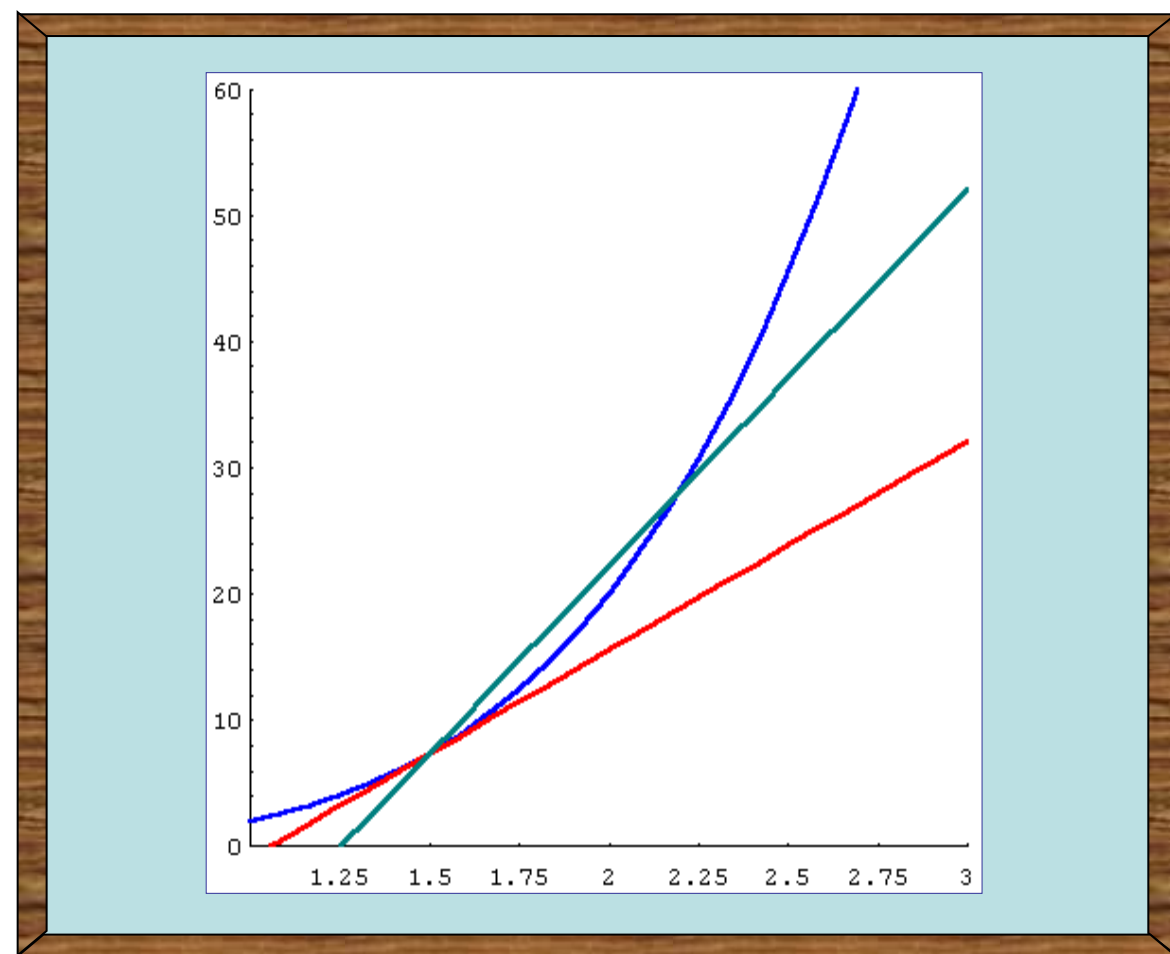
速度反映了路程对时间变化的快慢程度

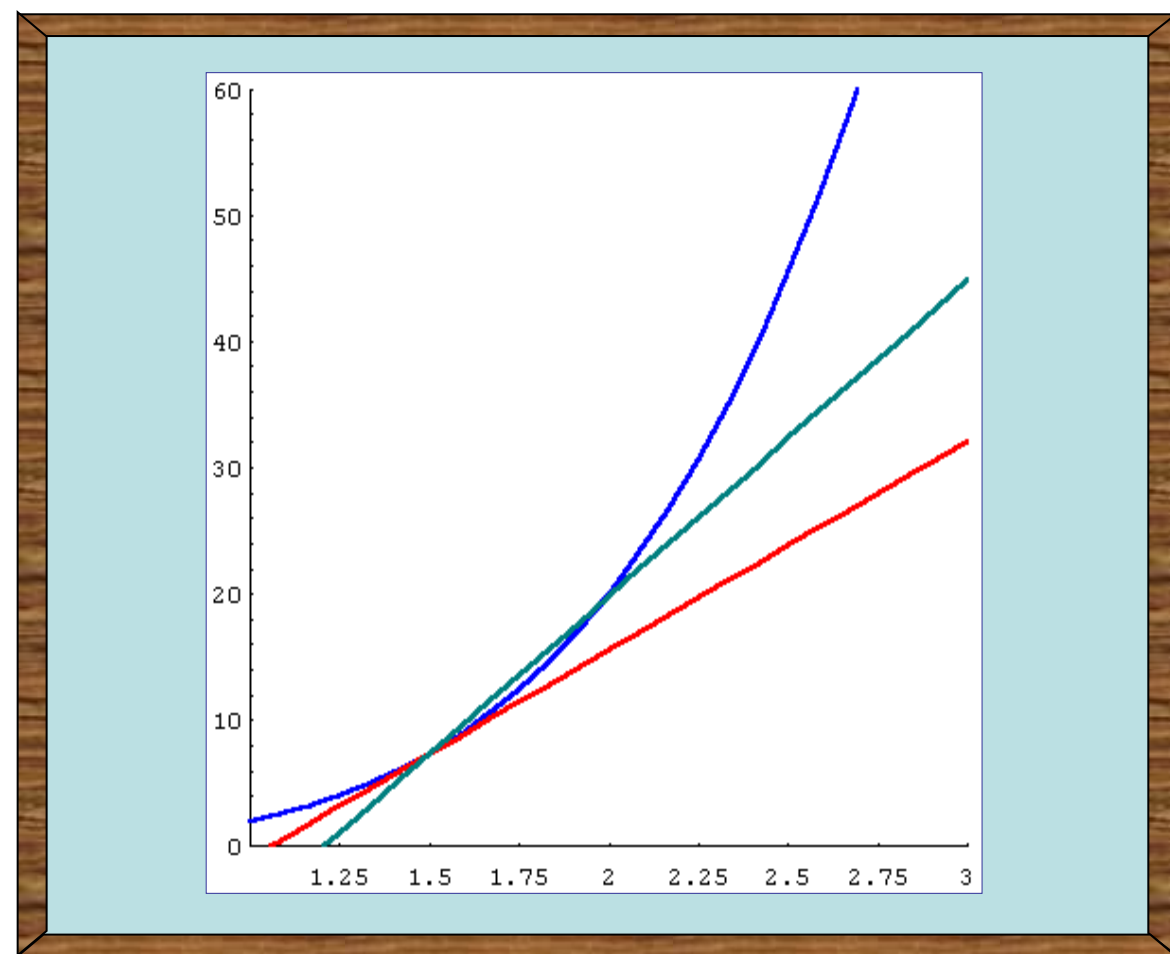
2.切线问题

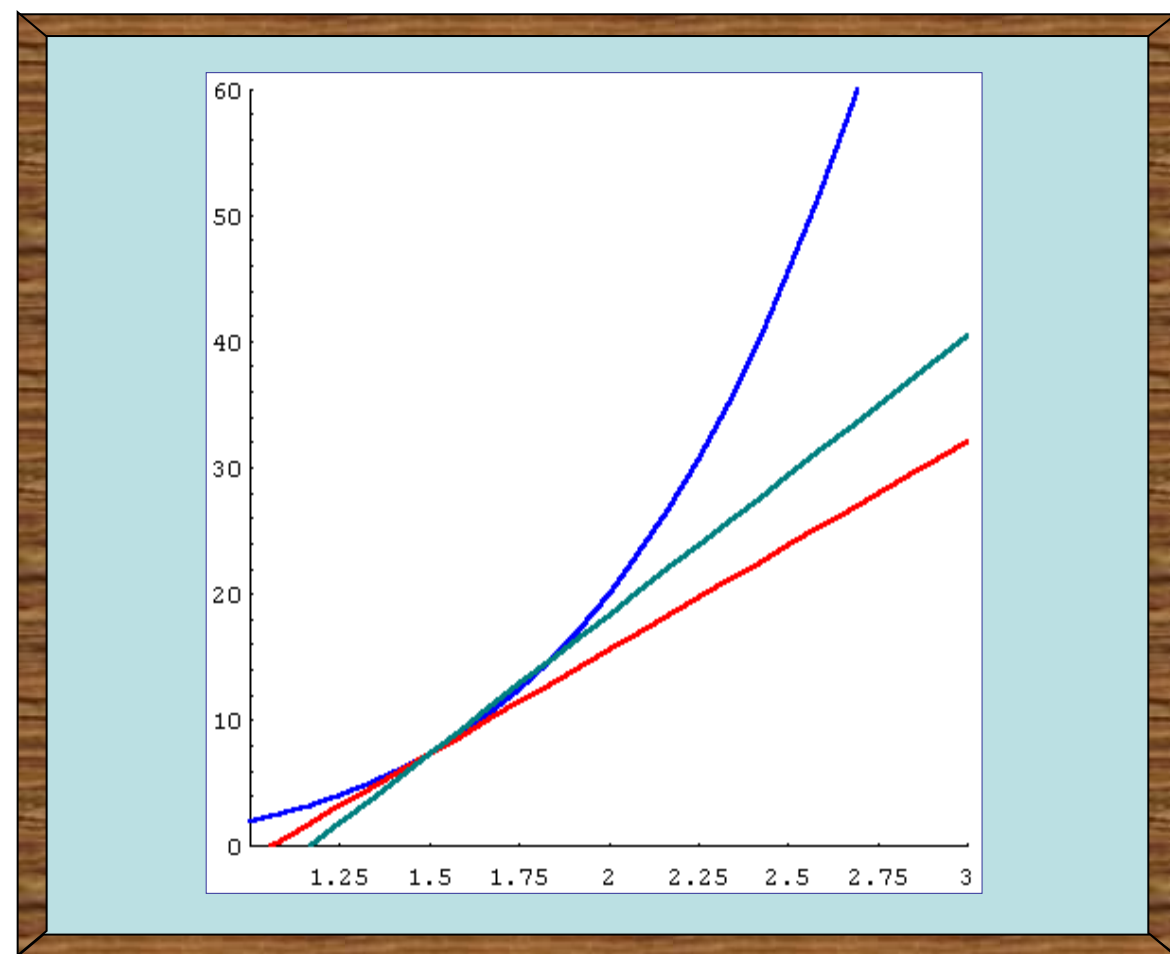
割线的极限位置——切线位置

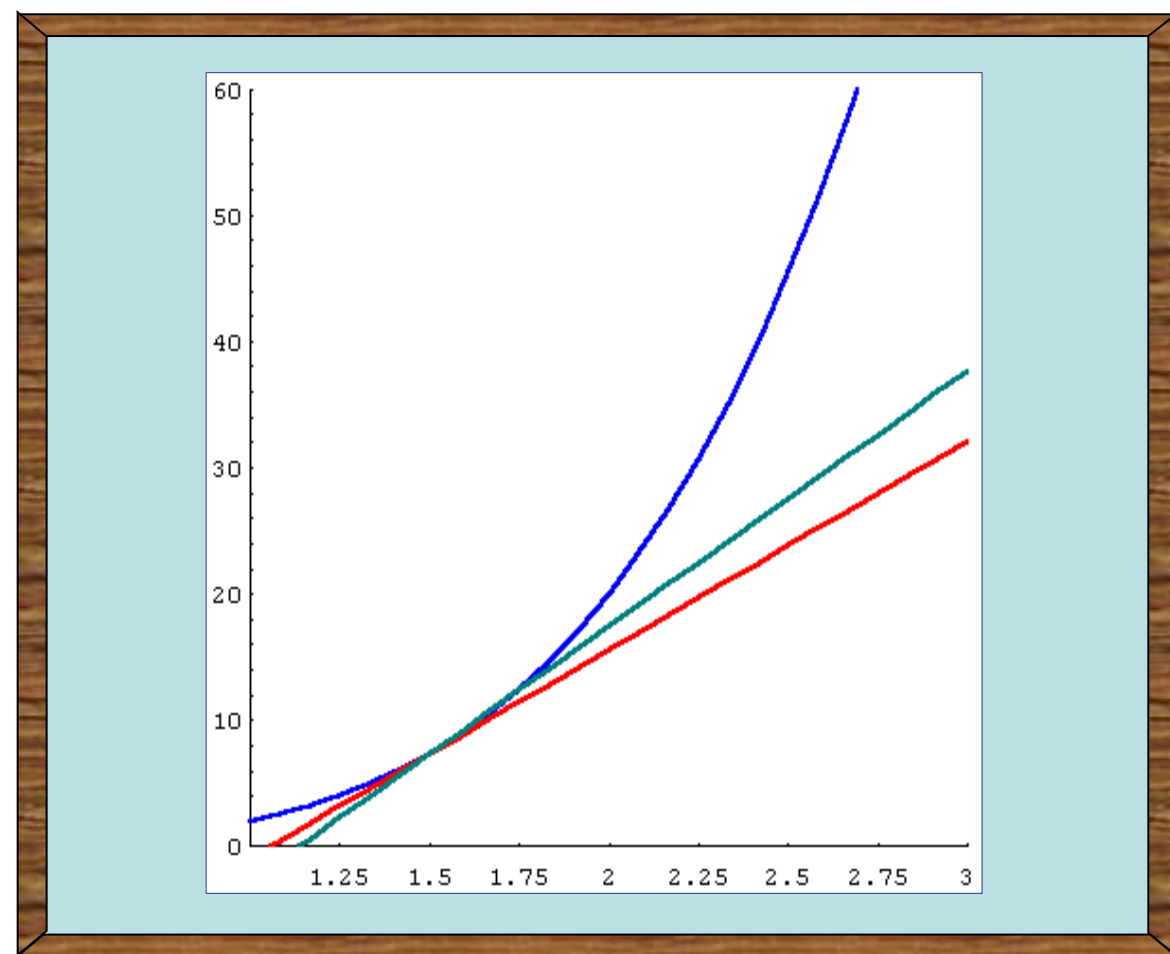


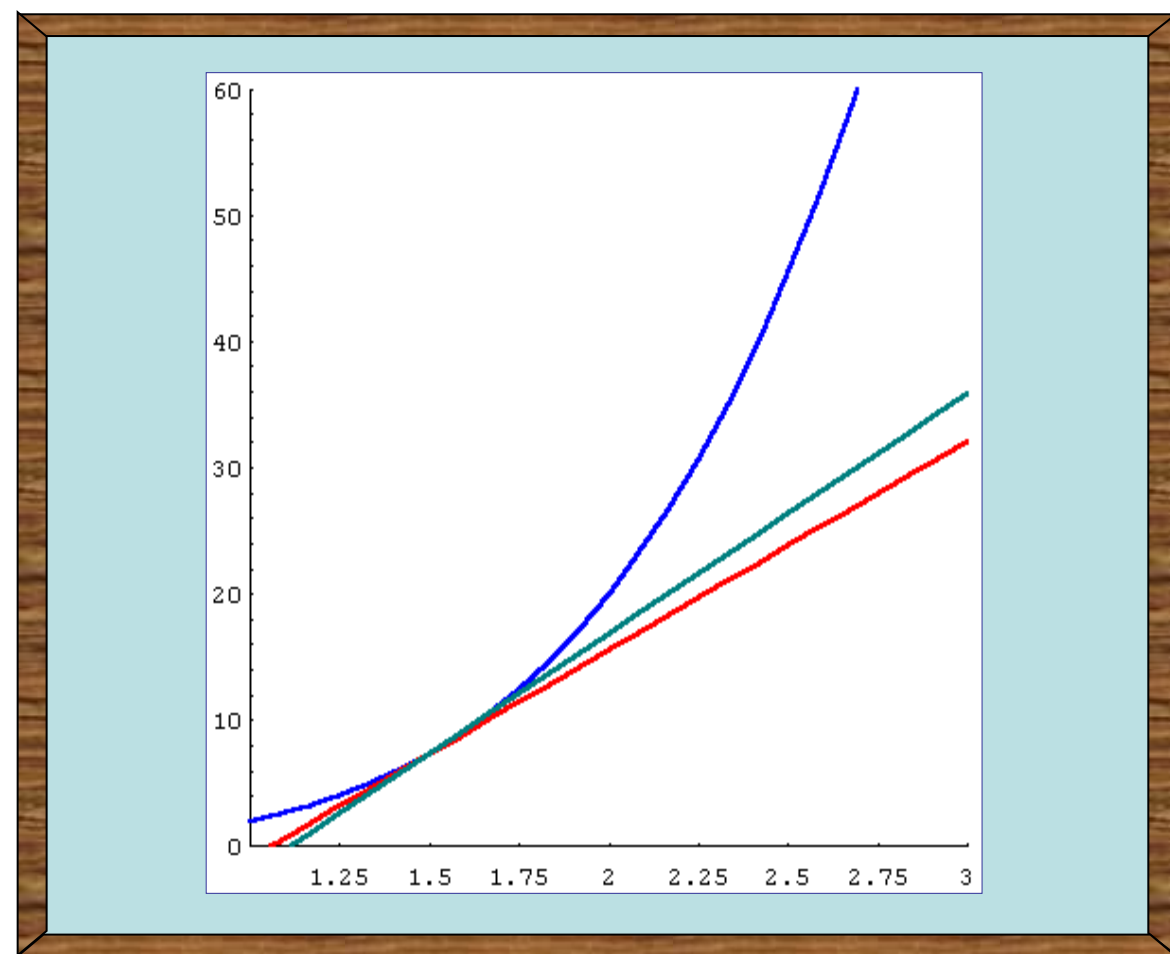


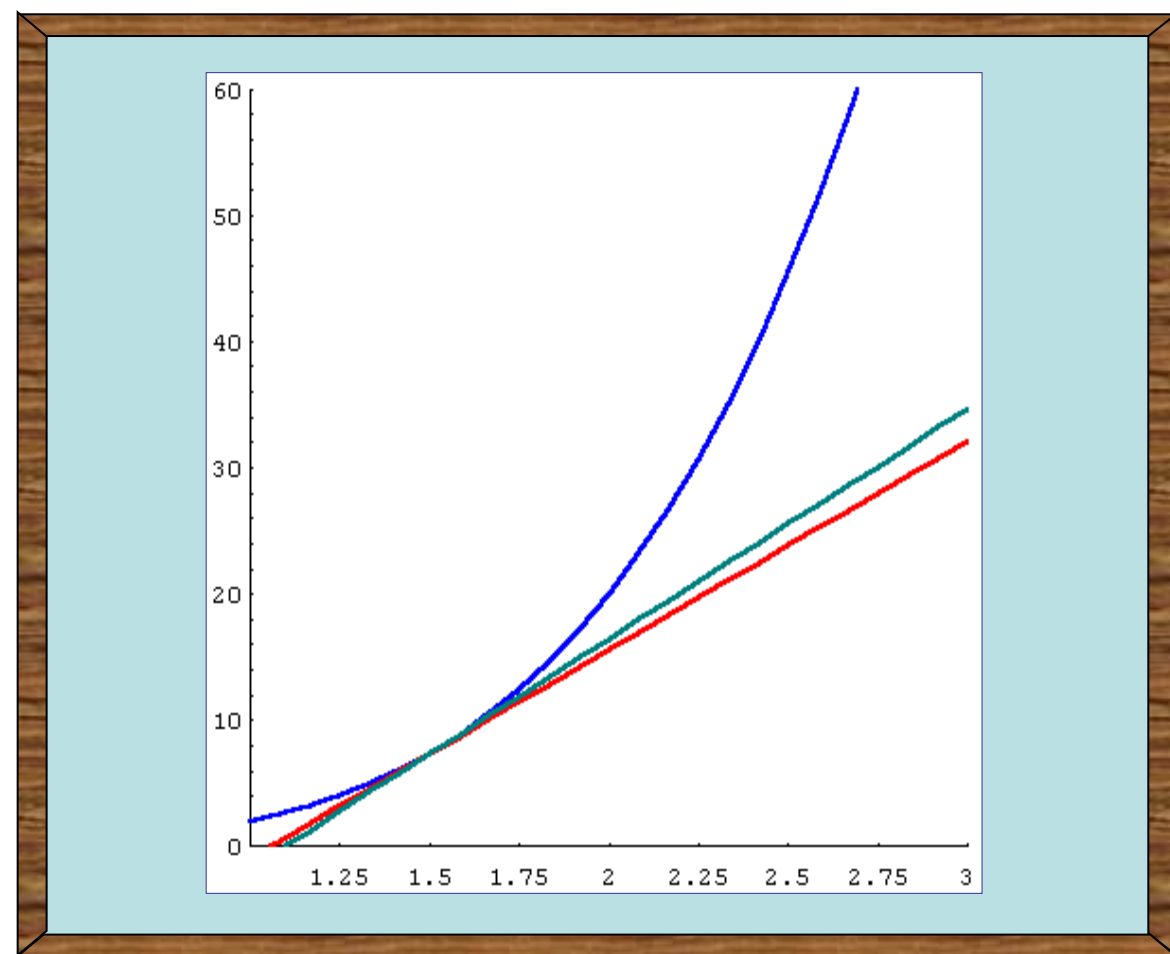


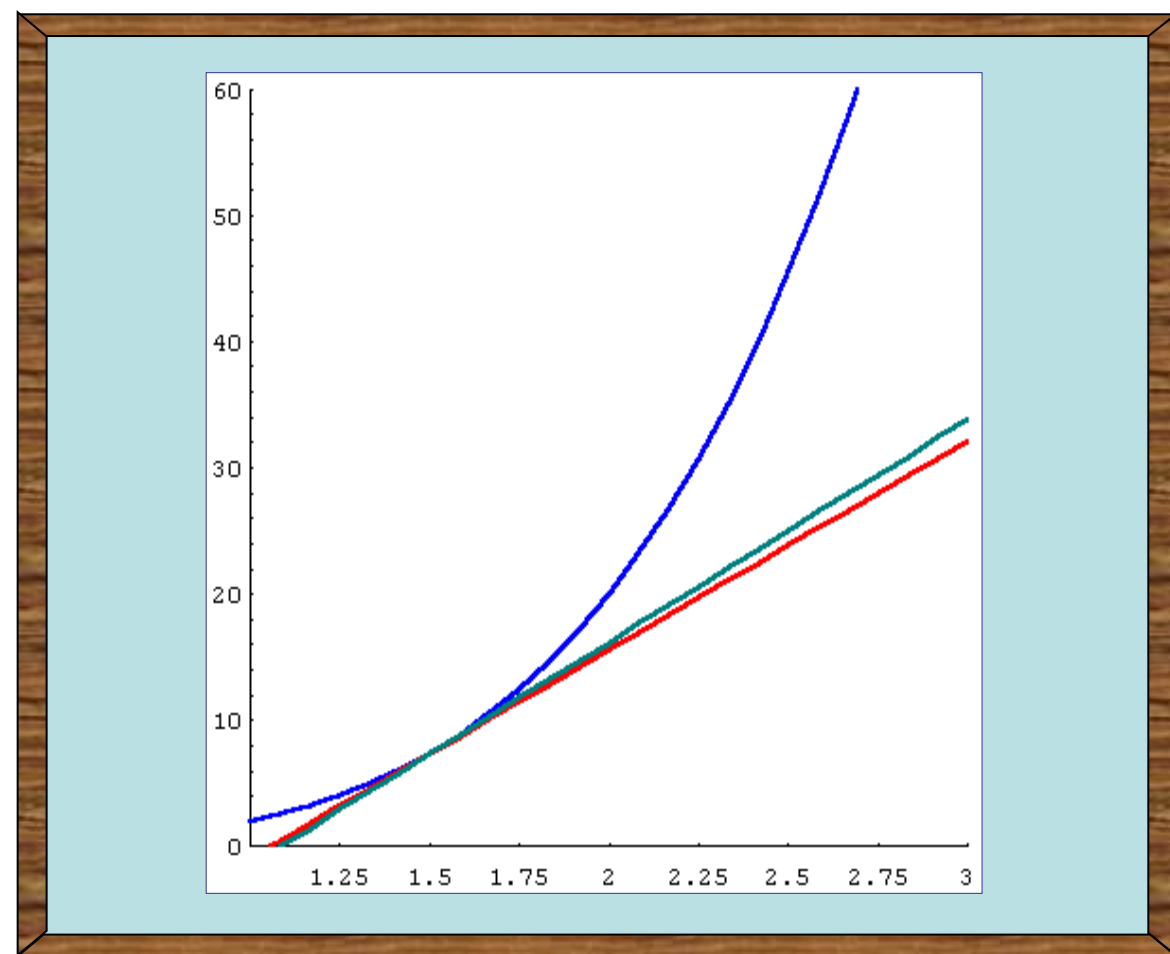


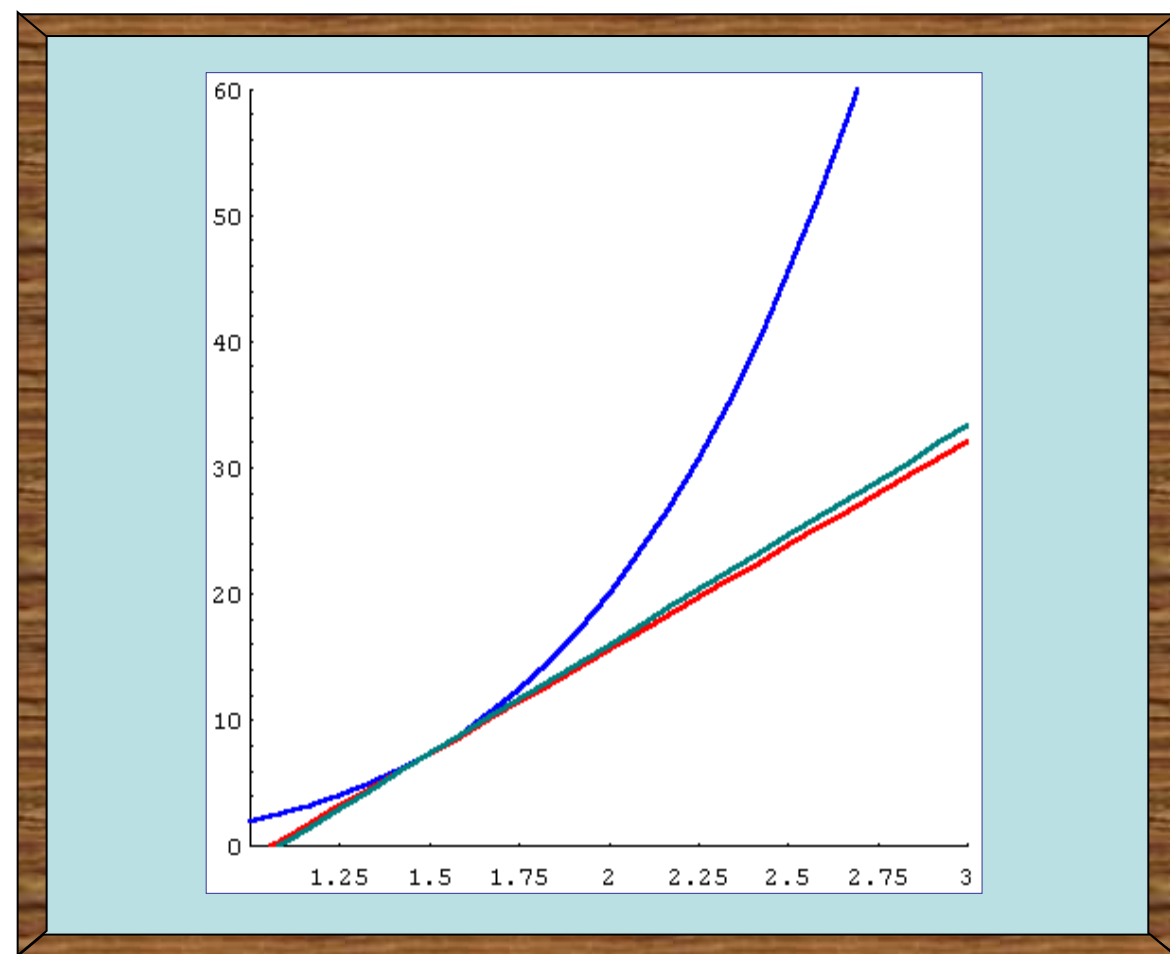


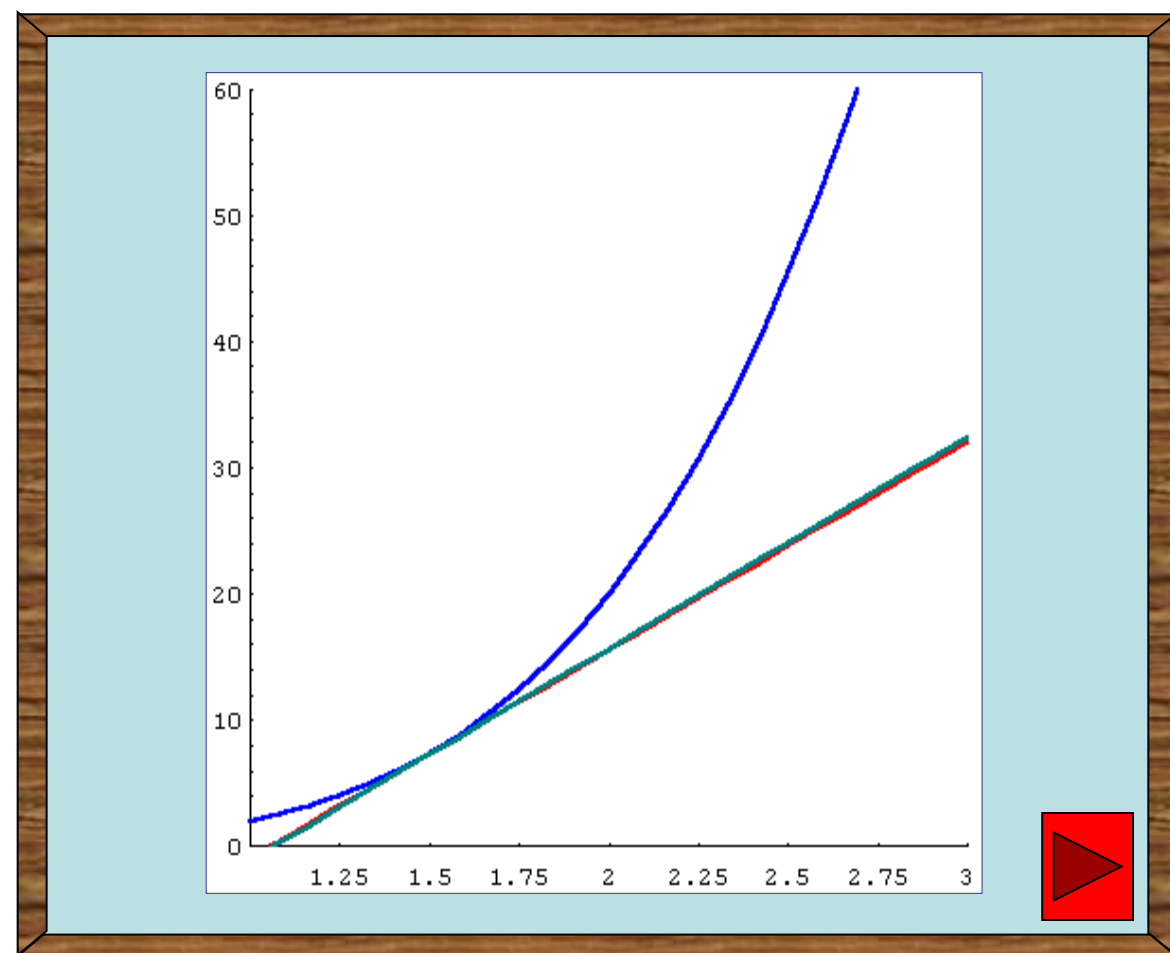






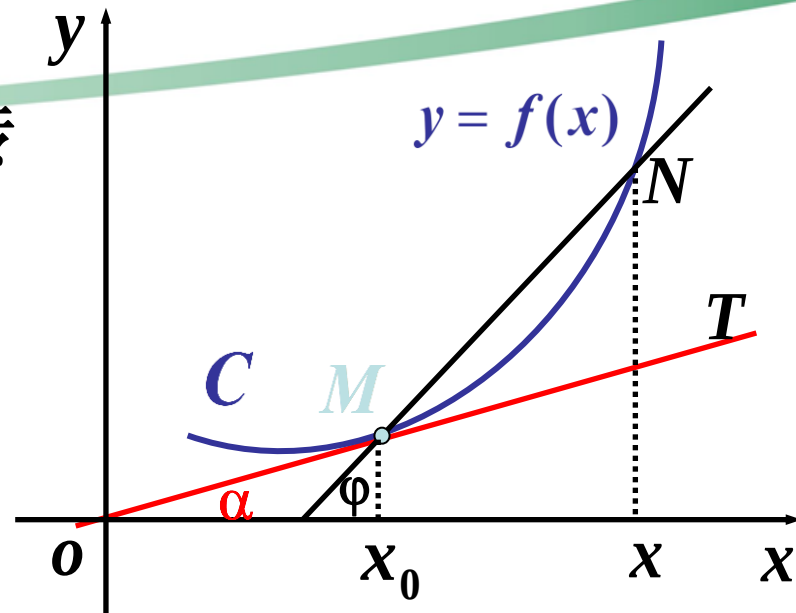






如图, 如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT, 直线MT就称为曲线C在点M处的切线.

极限位置即



$|MN| \rightarrow 0, \angle NMT \rightarrow 0.$ 设 $M(x_0, y_0), N(x, y).$

割线MN的斜率为 $\tan \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$

$N \xrightarrow{\text{沿曲线} C} M, x \rightarrow x_0,$

切线MT的斜率为 $k = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

二、导数的定义及几何意义

定义 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $y' \Big|_{x=x_0}$,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ 或 } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0},$$

$$\text{即 } y' \Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{其它形式 } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

关于导数的说明：

★ 导数概念是概括了各种各样的变化率而得出的一个更一般、更抽象的概念，它撇开了变量所代表的特殊意义，而纯粹从数量方面来刻画变化率的本质

★ 点导数是因变量在点 x_0 处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度。

★ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是 y 在以 x_0 和 $x_0 + \Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率

★ 如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导, 就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导.

★ 对于任一 $x \in I$, 都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值. 这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数.

记作 y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

$$\text{即 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{或 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

★ 单侧导数

1. 左导数:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

2. 右导数:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

★ 如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在, 就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

★ 设函数 $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq x_0 \\ \psi(x), & x < x_0 \end{cases}$, 讨论在点 x_0 的可导性.

$$\begin{aligned} \text{若 } \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\psi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \text{ 存在,} \end{aligned}$$

$$\text{若 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \text{ 存在,}$$

$$\text{且 } f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a,$$

则 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\text{且 } f'(x_0) = a.$$

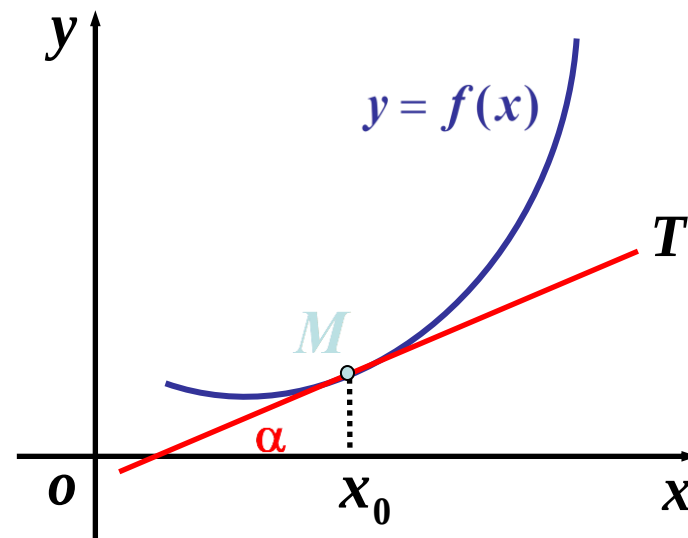
三、导数的几何意义

$f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$

在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的

切线的斜率,即

$f'(x_0) = \tan \alpha$, (α 为倾角)



若 $f'(x_0) \neq 0$ 且有限时 过 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

法线方程为 $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

当 $f'(x_0) = 0$ 时

切线方程为 $y = f(x_0)$

法线方程为 $x = x_0$

当 $f'(x_0) = \infty$ 时

切线方程为 $x = x_0$

法线方程为 $y = f(x_0)$

例1 求等边双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义,得切线斜率为

$$k = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

所求切线方程为 $y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})$, 即 $4x + y - 4 = 0$.

法线方程为 $y - 2 = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})$, 即 $2x - 8y + 15 = 0$.

四、函数可导与连续的关系

定理 凡可导函数都是连续函数.

证 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

$$\alpha \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0) \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x] = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

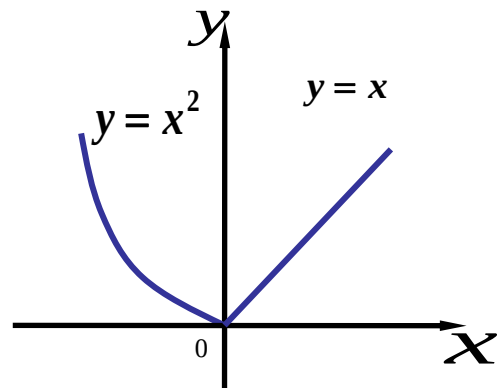
注意：该定理的逆定理不成立.

★ 连续函数不存在导数举例

1. 函数 $f(x)$ 连续, 若 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点, 函数在角点不可导.

例如,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$



在 $x = 0$ 处不可导, $x = 0$ 为 $f(x)$ 的角点.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 但

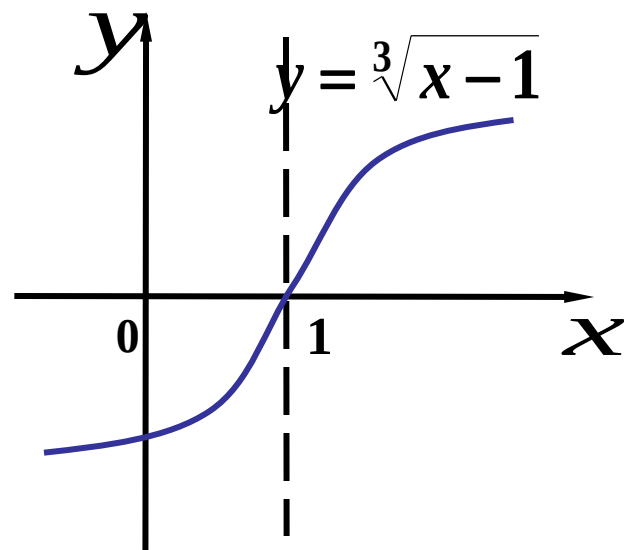
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有无穷导数.(不可导)

例如,

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1},$$

在 $x=1$ 处不可导.

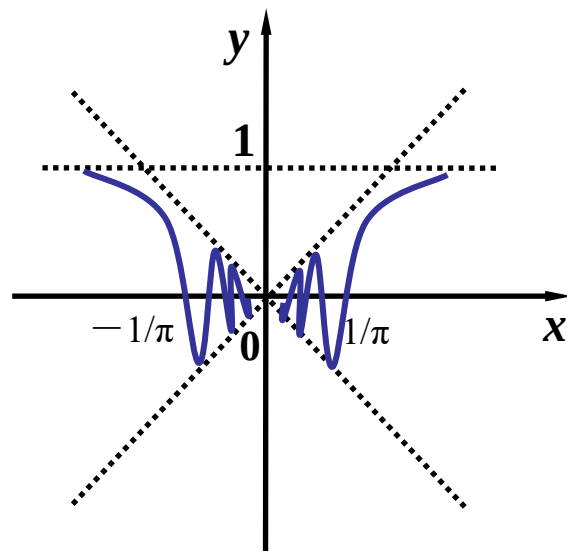


3. 函数 $f(x)$ 在连续点的左右导数都不存在
(指摆动不定), 则 x_0 点不可导.

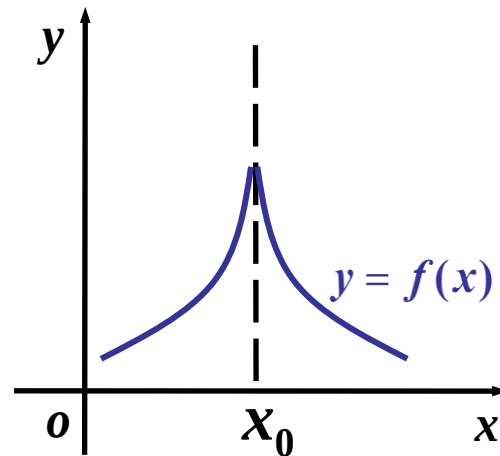
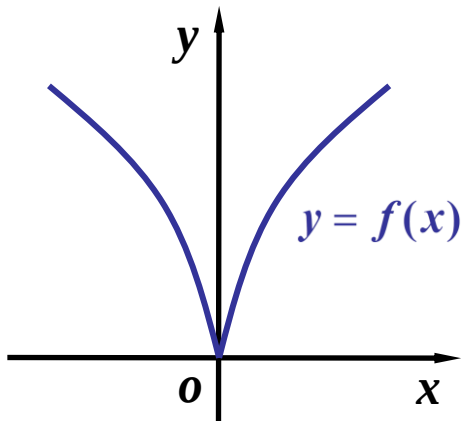
例如,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

在 $x = 0$ 处不可导.



4. 若 $f'(x_0) = \infty$, 且在点 x_0 的两个单侧导数符号相反, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的尖点(不可导点).



五、作业：求切线方程

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $(1, 1)$ 处。

(2) 求曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程。

感谢聆听

