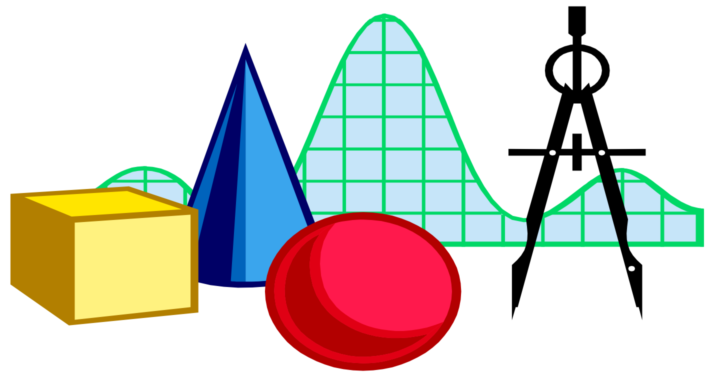
函数的连续性

数学教研室



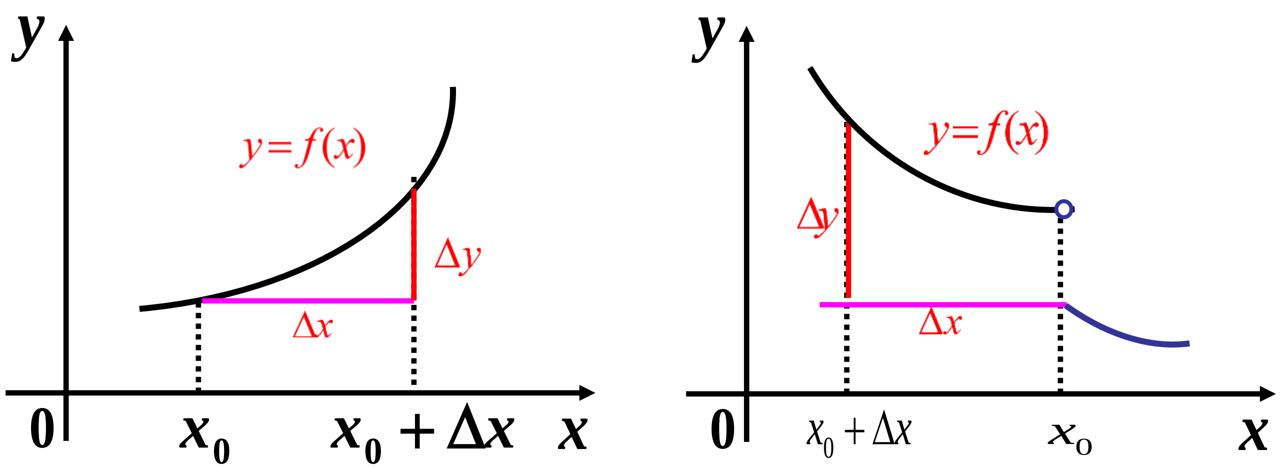
一、函数的连续性

1.函数的增量

设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, $\forall\ x \in U_\delta(x_0)$,

$\Delta x = x - x_0$, 称为自变量在点 x_0的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数 $f(x)$相应于Δx的增量.



2.连续的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋向于零，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x$, $\quad \Delta y = f(x) - f(x_0)$,

$\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$, $\Delta y \to 0$ 就是 $f(x) \to f(x_0)$.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$

处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义2知

函数 $f(x)$在 $x=0$处连续 .

3.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处<u>左连续</u>;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处<u>右连续</u>.

定理 函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$是函数$f(x)$在x_0处既左连续又右连续.

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\ge 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2 = f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$

右连续但不左连续，

故函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

4.连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间(a,b)内连续，并且在左端点$x=a$处右连续，在右端点$x=b$处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如，有理整函数在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

二、函数的间断点

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只　要有一个不满足　，则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续（或间断 ），并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点（或间断点 ）.

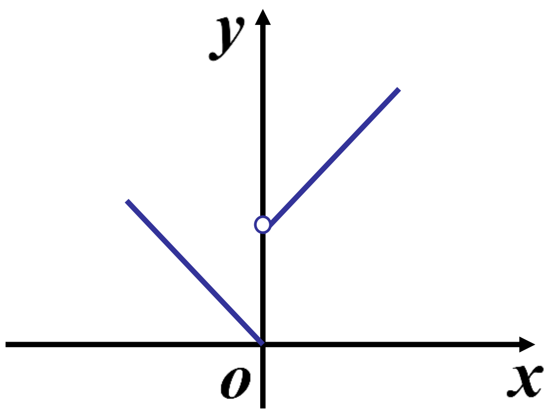
（1）**跳跃间断点** 如果 $f(x)$在点 x_0处左，右极限都存在，但$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 x_0为函数 $f(x)$的跳跃间断点 .

例3　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$ **在x=0处的连续性。**

解　$f(0-0)=0,\quad f(0+0)=1,$

$\because f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$为函数的跳跃间断点 .

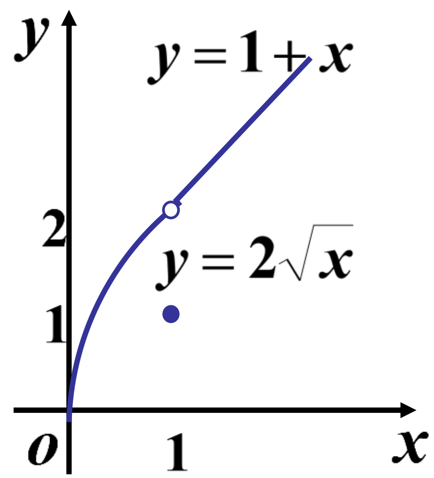


（2）可去间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例4 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1+x, & x > 1, \end{cases}$$

在 $x=1$ 处的连续性.



解 $\because f(1)=1,$

$$f(1-0)=2, \qquad f(1+0)=2,$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2 \neq f(1),$$

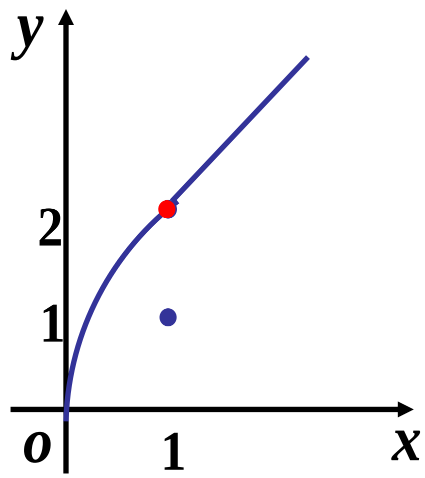
$\therefore x=1$为函数的可去间断点.

注意 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

如例4中，令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1+x, & x\ge 1,\end{cases}$

在$x=1$处连续.



跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点　函数在点x_0处的左、右极限都存在.

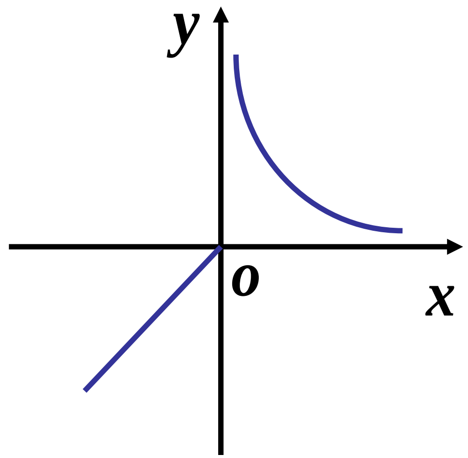
（3）第二类间断点　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例5　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　$f(0-0)=0$，$f(0+0)=+\infty$，

$\therefore x=1$ 为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.



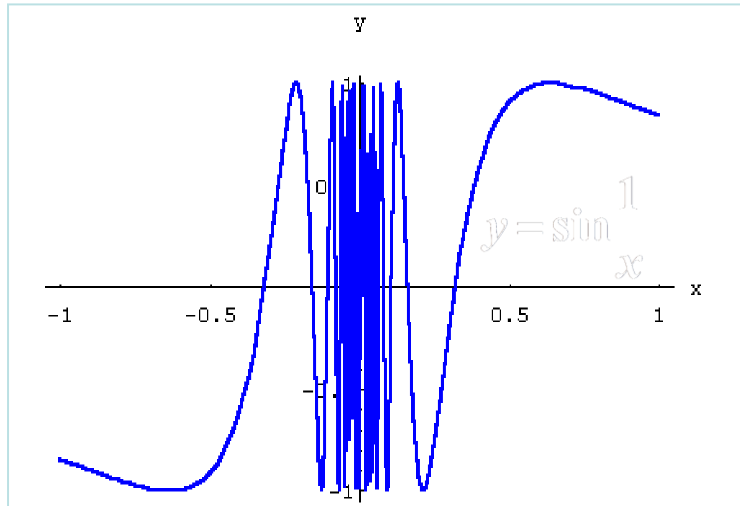
例6 讨论函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

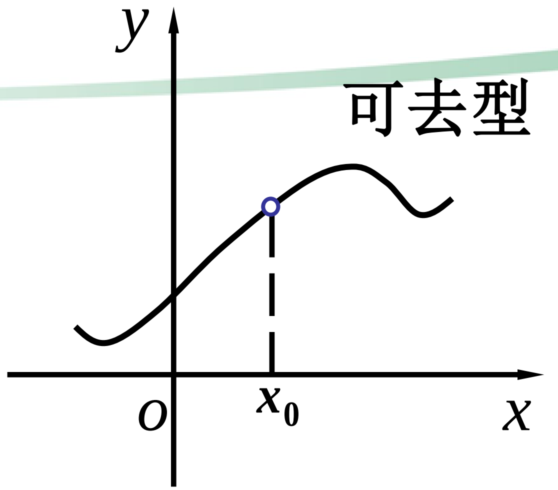
$\therefore\ x=0$ 为第二类间断点.

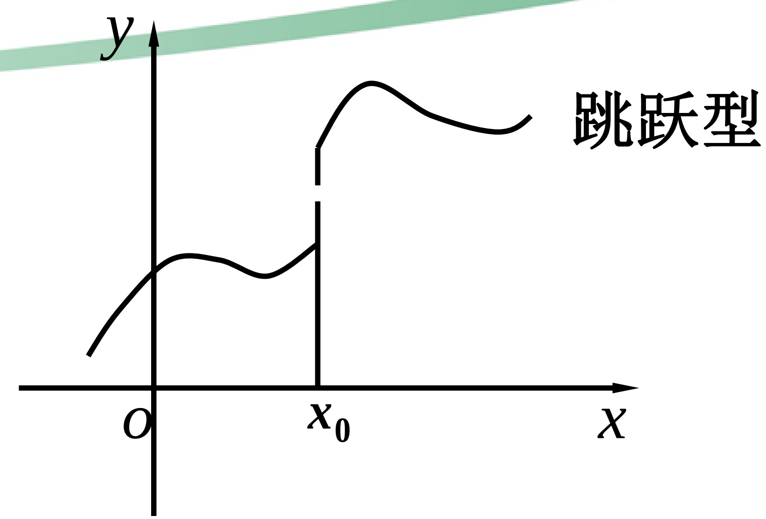
这种情况称为的振荡间 断点.



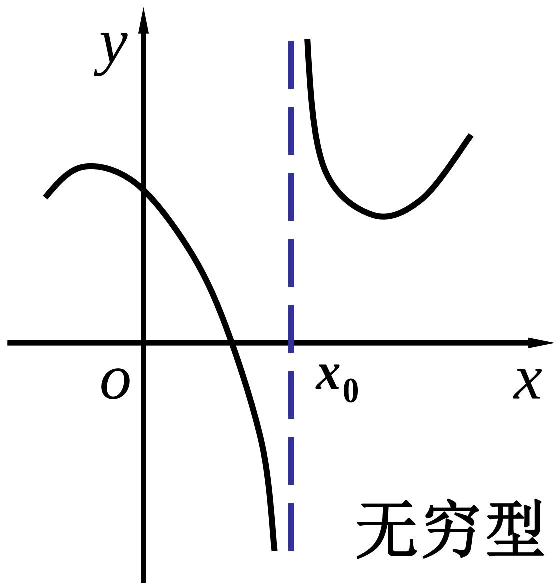
注意 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

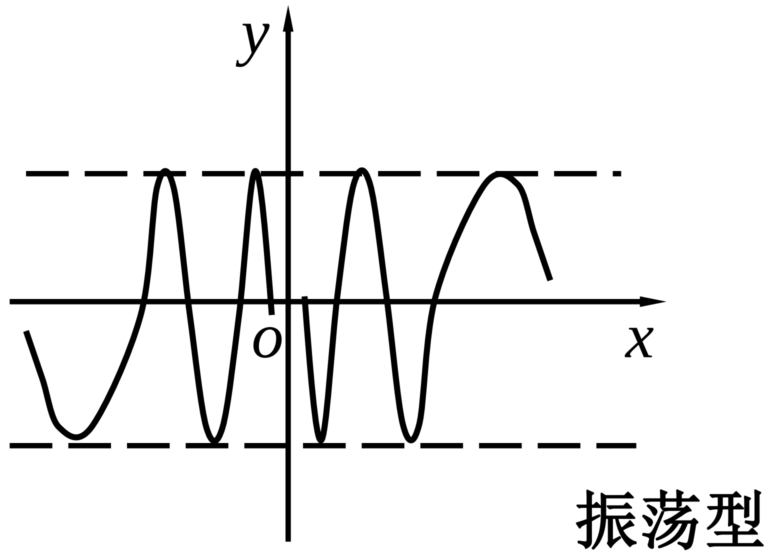
第一类间断点





第二类间断点





三、间断点作业：

1、确定下列间断点的类型，如果是可去间断点，补充函数的定义使其连续。

$$(1)\ f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2)\ f(x)=\frac{x}{\sin x}$$

$$(3)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$$

$$(4)\ f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(5)\ f(x)=\begin{cases} x^2-1, x<0 \\ 0, x=0 \\ 2^x, x>0 \end{cases}$$

2.设分段函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, x\geq 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, x<0\end{cases}$ $a>0$

a取什么值时， x=0是函数f(x)的连续点？

3.讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

在x=0处的连续性。

四、初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续;

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^{u},\ u = \mu \log_a x.$

在$(0,+\infty)$内连续，讨论μ不同值，

(均在其定义域内连续)

定理 基本初等函数在定义域内是连续的.

定理 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意 1. 初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续;

例如， $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D: x=0$, 及$x \geq 1$,

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

注意 2. 初等函数求极限的方法<u>代入法.</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln \sin x$

解 $y = \ln \sin x$是初等函数

它的一个定义区间是$(0,\pi)$ 而$x_0 = \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\sin x = \ln\sin\frac{\pi}{2} = 0$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$=\frac{0}{2}=0.$$

五、闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有着十分优良的性质，这些性质在函数的理论分析、研究中有着重大的价值，起着十分重要的作用。下面我们就不加证明地给出这些结论，好在这些结论在几何意义是比较明显的。

1、最大值和最小值定理

定义： 对于在区间I上有定义的函数$f(x)$，

如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

例如，$y = 1 + \sin x$，在$[0, 2\pi]$上，$y_{\max} = 2$，$y_{\min} = 0$；

$y = \operatorname{sgn} x$，在$(-\infty, +\infty)$上，$y_{\max} = 1$，$y_{\min} = -1$；

在$(0, +\infty)$上，$y_{\max} = y_{\min} = 1$.

定理1（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

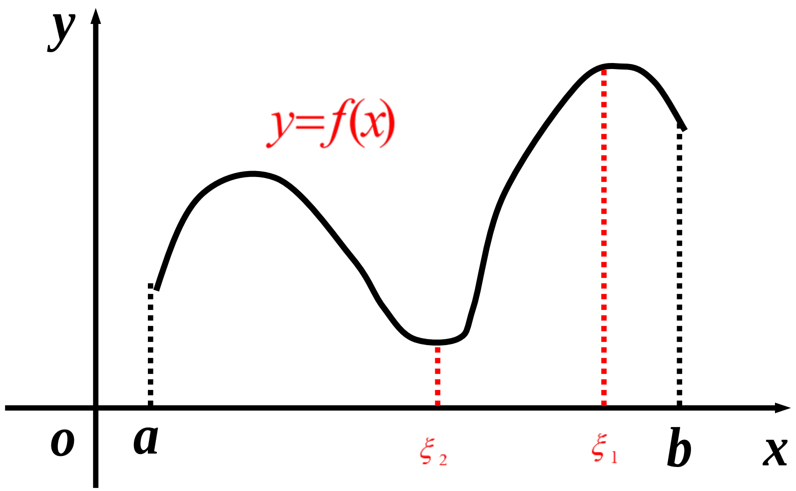
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

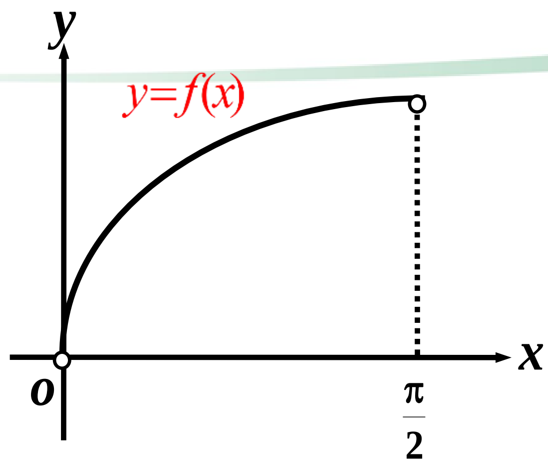
有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

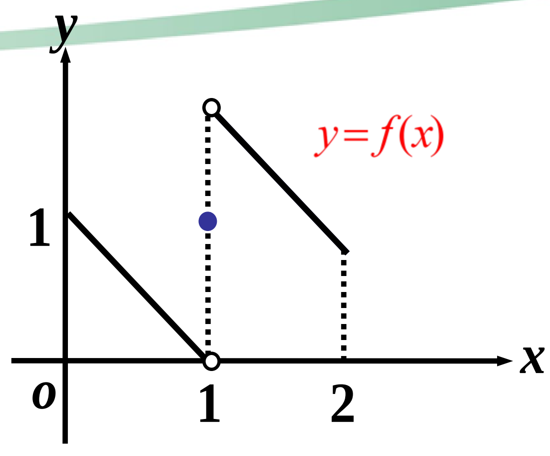
$f(\xi_2) \leq f(x)$.



注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





定理2（有界性定理） 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续， $\forall x \in [a,b]$,

有 $m \le f(x) \le M$， 取 $K = \max\{|m|,|M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$． $\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

2、介值定理

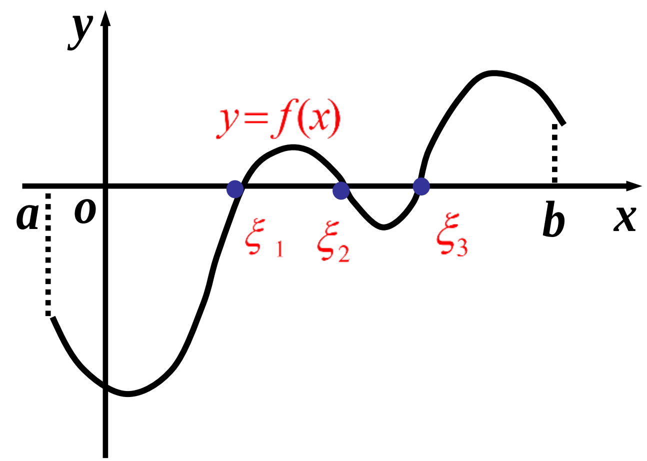
定义： 如果x_0使$f(x_0)=0$，则x_0称为函数$f(x)$的零点.

定理3（零点定理） 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号（即$f(a)\cdot f(b)<0$），那末在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点，即至少有一点ξ $(a<\xi<b)$，使$f(\xi)=0$.

即方程$f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根.

几何解释:

连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



定理 4（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$.

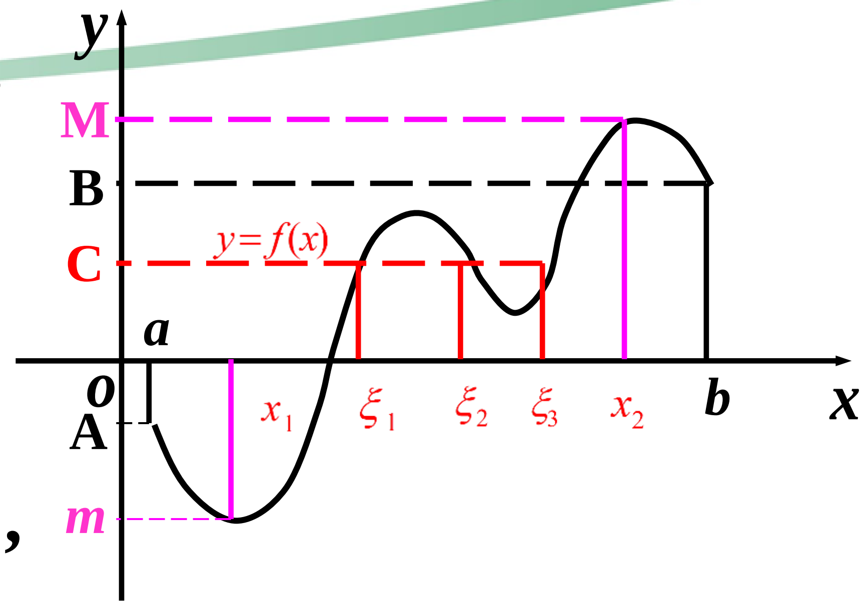
证 设$\varphi(x)=f(x)-C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a)=f(a)-C$

$=A-C$,

$\varphi(b)=f(b)-C=B-C$,



$\therefore \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$, 由零点定理, $\exists\,\xi\in(a,b)$,使

$\varphi(\xi)=0$, 即$\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0$, $\therefore f(\xi)=C$.

几何解释: 连续曲线弧$y=f(x)$与水平直线$y=C$至少有一个交点.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例1 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$, 由零点定理,

$\exists\, \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即 $\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$,

$\therefore$ 方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.


感谢聆听