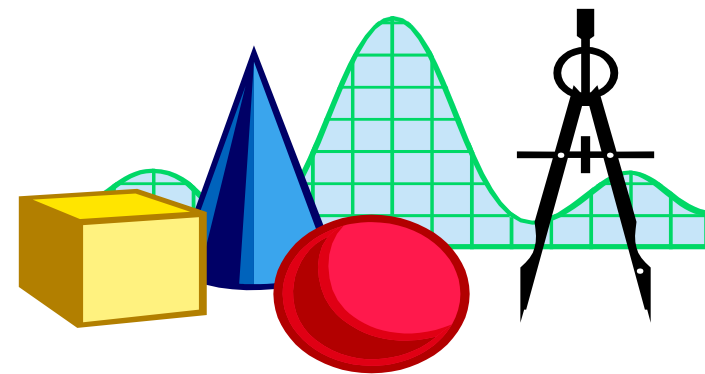


两个重要极限

数学教研室



一、极限存在准则

1. 夹逼定理

准则 I 如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

$$(1) y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

那末数列 x_n 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

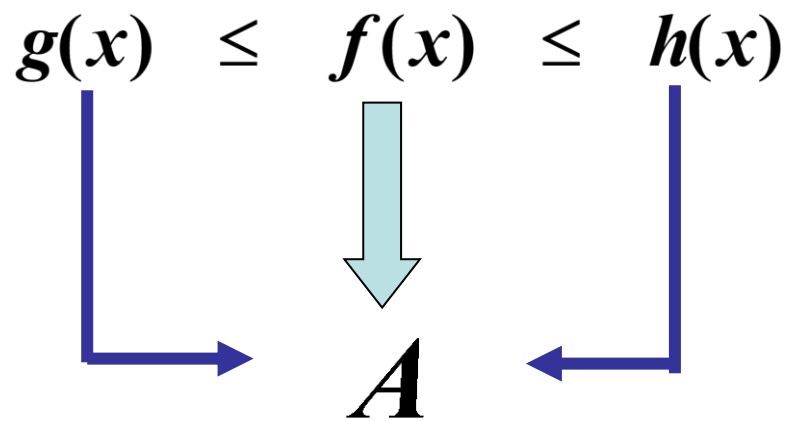
准则 I' 如果当 $x \in U_{\delta}^0(x_0)$ (或 $|x| > M$) 时, 有

(1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A,$

那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在, 且等于 A .

夹逼定理示意图



例1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1, \quad \text{由夹逼定理得}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

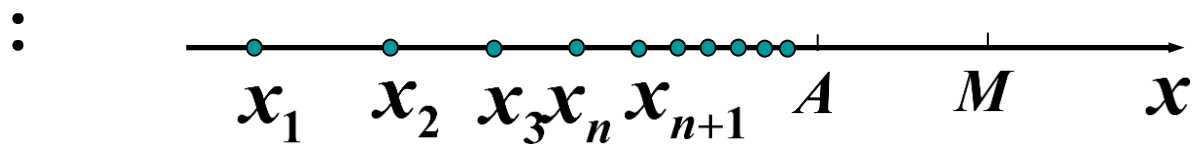
2. 单调有界准则

如果数列 x_n 满足条件

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots, \text{ 单调增加} \\ x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots, \text{ 单调减少} \end{array} \right\} \text{ 单调数列}$$

准则 II 单调有界数列必有极限.

几何解释



例2 证明数列 $x_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{3}}}}$ (n 重根式) 的极限存在

证 显然 $x_{n+1} > x_n$, $\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

又 $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, $x_{k+1} = \sqrt{3 + x_k} < \sqrt{3 + 3} < 3$,

$\therefore \{x_n\}$ 是有界的; $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

$$\because x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}, \quad x_{n+1}^2 = 3 + x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 + x_n),$$

$$A^2 = 3 + A, \quad \text{解得 } A = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad A = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ (舍去)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

二、两个重要极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

[播放动画](#)

首先注意到 函数 $\frac{\sin x}{x}$ 对一切 $x \neq 0$ 都有定义
设法构造一个“夹逼不等式”，使函数 $\frac{\sin x}{x}$
在 $x=0$ 的某去心邻域内置于具有同一极限值的两个
函数 $g(x), h(x)$ 之间，以便应用 **准则I**

注 此结论可推广到 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \phi(x)}{\phi(x)} = 1$

条件是 $x \rightarrow a$ 时, $\phi(x) \rightarrow 0$, 其中 a 可为有限值, 也可为 ∞

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

例5 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

解 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 则当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时 $t \rightarrow 0$

于是 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{t}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(e = 2.71828 \dots)$$

注 此结论可推广到 $\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \phi(x)\right)^{\frac{1}{\phi(x)}} = e$

条件是 $x \rightarrow a$ 时, $\phi(x) \rightarrow 0$, 其中 a 可为有限值, 也可为 ∞

例6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}} = \frac{1}{e}.$

一般地

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

例7 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

解一 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right\}^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)$
 $= e^2$

解二 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$

三、两个重要极限的作业：

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^x$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{3x-1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{2 \sec x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x}}}$$

感谢聆听

