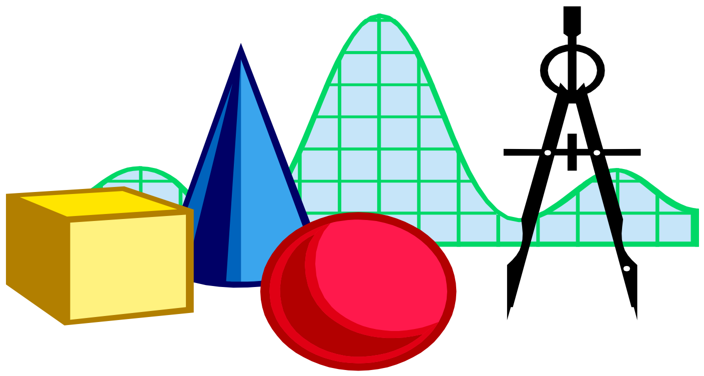
极限的四则运算

数学教研室



一、极限的四则运算

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中 $B\neq 0$.

推论1 如果$\lim f(x)$存在，而c为常数，则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在，而n是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

定理的条件： $\lim f(x), \lim g(x)$ 存在

商的情形还须加上分母的极限不为0

定理简言之即是：和、差、积、商的极限等于极限的和、差、积、商

二、求极限方法举例

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且$Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若$Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用

例2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0,$ 商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3\neq0,$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时,分子,分母的极限都是零. $(\dfrac{0}{0}\text{型})$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时，分子，分母的极限都是无穷大. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

先用x^3去除分子分母，分出无穷小，再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 $n\to\infty$时,是无穷小之和. 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例6 已知 $\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求$a,b$的值

$$\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=2$$

$$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases} \qquad \begin{cases}a=25\\ b=20\end{cases}$$

求极限的作业：

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x^4-1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+5x-6}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

$$9.\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^{3}}\right)$$

$$10.\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

$$11.\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^{2}+3x+1}-\sqrt{4x^{2}-3x-2}\right)$$

$$12.\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)$$

$$13.\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}+1}{x^{3}-1}(2+\cos x)$$

14、若$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，求 k 的值。

15、若$\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，求 a、b 的值。


感谢聆听