第六章　常微分方程

在科学研究和生产实践中，寻求变量之间的函数关系具有重要意义.但在许多实际问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，而要根据问题所提供的情况，列出含有要找的函数及其导数或微分的关系式，这样的关系式就是微分方程.若关系式中的未知函数是一元函数，这样的微分方程称为常微分方程（简称微分方程）.本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种较简单的微分方程的解法.

§6−1　微分方程的基本概念

一、引例

我们先看下面两个例子：

例1　一曲线通过点（1，2），且在该曲线上任意点 M（*x*,y）处的切线斜率为 2*x*，求曲线的方程.

解　设所求曲线方程为 y=y (x), 按题意，未知函数 y (x)应满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad \textbf{(6−1−1)}$$

此外，y (*x*)还应满足下列条件：

$$x=1 \text{ 时 } y=2 \qquad \textbf{(6−1−2)}$$

把**(6−1−1)**式两端对 x 积分,得

$$y=\int 2xdx=x^2+C \qquad （6−1−3）$$

把条件（6−1−2）代入（6−1−3）式，得

$$2=1+C, \quad C=1$$

把 C=1 代入(6−1−3)式，得所求曲线的方程为

$$y=x^2+1. \qquad （6−1−4）$$

例2　设自由落体从静止以初速度 v_0 下落，下落时的加速度为常数 g (g>0)，求自由落体的运动规律.

解　设自由落体运动的路程 s 随时间 t 变化的规律为 $s=s(t)$。由加速度是路程 s 对时间 t 的二阶导数可知

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \qquad \textbf{(6−1−5)}$$

上式两边对 t 求一次积分, 得到

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1 \qquad \textbf{(6−1−6)}$$

再求一次积分便得到

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \qquad \textbf{(6−1−7)}$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

由于自由落体是从静止且以初速度v_0下落的，即当 t=0 时，s=0, $v=v_0$. 因此将上述条件分别代入（6−1−6）及（6−1−7）式得 $C_1=v_0$, $C_2=0$. 于是自由落体的运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t \qquad (6-1-8)$$

在这两个例子中，关系式（6−1−1）和（6−1−5）都含有未知函数的导数，它们都称为微分方程.

二、微分方程的概念

（1）**什么是微分方程**

一般地，凡表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间的关系的方程，称为**微分方程**.

（2）**微分方程的阶**

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的**阶数**，称为微分方程的**阶**. 例如方程（6−1−1）是一阶微分方程；方程（6−1−5）是二阶微分方程. 又如，方程

$$x^2y'''+xy''-4y'=3x^4$$

是三阶微分方程；而方程

$$y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=\sin 2x$$

是四阶微分方程.

一般地，一阶微分方程的形式为

$$y'=f(x,y) \text{ 或 } F(x,y,y')=0$$

而二阶微分方程的形式为

$$y''=f(x,y,y') \text{ 或 } F(x,y,y',y'')=0.$$

（3）**微分方程的解**

如果求出这样的函数，把它及它的导数代入微分方程时，能使微分方程成为恒等式.这样的函数称为微分方程的**解**.例如，函数（6−1−3）和（6−1−4）都是微分方程（6−1−1）的解；函数（6−1−7）和（6−1−8）都是微分方程（6−1−5）的解.

（4）**微分方程的通解**

如果微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的**通解**.例如，函数（6−1−3）是方程（6−1−1）的解，它含有一个任意常数，而方程（6−1−1）是一阶的，所以函数（6−1−3）是方程（6−1−1）的通解.又如函数（6−1−7）是方程（6−1−5）的解，它含有两个独立的任意常数，而方程（6−1−5）是二阶的，所以函数（6−1−7）是方程（6−1−5）的通解.

（5）**初始条件：**

由于微分方程的通解中含有任意常数,所以它还不能完全确定的反映某一客观事物的规律性，要完全确定的反映客观事物的规律性，常常是通过附加条件确定出通解中的常数.例如，在例 1 中，当 x=1 时，y=2; 在例 2 中，当 t=0 时，s=0 ,$v=v_0$都是这种附加条件.这种附加条件称为**初始条件**.一般记为

$$\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=y_0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y\big|_{x=x_0}=0 \\ \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}.$$

（6）**微分方程的特解**

满足初始条件的解，称为微分方程的**特解**.例如函数（**6**−1−**4**）是方程（**6**−**1**−**1**）满足初始条件 $y\big|_{x=1}=2$ 的特解，函数（**6**−1−8）是方程（**6**−1−5）满足

初始条件 $\begin{cases} s\big|_{t=0}=0 \\ v\big|_{t=0}=v_0 \end{cases}$ 的特解.

例3　验证函数 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 是微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ 的解.

解　由 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 得

$$\frac{dy}{dx}=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x$$

代入原方程得

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x+4(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)=0$$

故原命题成立.

例 4　求出上例中满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$ 的特解.

解　将 $y\big|_{x=0}=1$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$ 代入

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 和

$\dfrac{dy}{dx}=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x$ 中得

$$C_1=1，\quad C_2=0$$

所以，所求方程的特解为

y=cos2x.

习题　6−1

1．指出下列微分方程的阶数

（1）$x^2y'+y+1=0$；

（2）$x(y')^2+2xyy'+x=0$；

（3）$dy=(4x-1)dx$；

（4）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\cos x$.

2．判断下列函数是否为所给微分方程的解，若是，是通解还是特解？

（1）$xy'=2x$， $y=5x^2$

（2）$y''-2y'+y=0$， $y=x^2e^x$

（3）$yy'=x-2x^3$， $y=x\sqrt{1-x^2}$

（4）$y=xy'+\dfrac{2}{3}(y')^{\frac{3}{2}}$， $y=Cx^2$

3．曲线在点(x, y)处的切线斜率等于该点横坐标的平方，试列出曲线所满足的微分方程.

4．一物体作直线运动，其运动速度为 v=2cost 米/秒，当$t=\dfrac{\pi}{4}$秒时，物体与原点 O 相距 10 米，求物体在时刻 t 与原点的距离 s (t).

§6-2　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{6-2-1}$$

的微分方程，称为**可分离变量的微分方程**. 可分离变量的微分方程要用**分离变量法**求解.

分离变量法解微分方程的步骤为

（1） 分离变量 $\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$

（2） 两边积分，得 $\displaystyle\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$

（3） 求出积分，得通解 $G(y)=F(x)+C$

其中$G(y)$，$F(x)$分别是$\dfrac{1}{g(y)}$，$f(x)$的原函数.

例 1 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=2xy$$

的通解.

解 此微分方程是可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

两边积分 $\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$

得 $\ln y = x^2 + C_1$

即 $y = e^{x^2+C_1} = e^{C_1}e^{x^2}$

因 e^{C_1} 仍是任意常数，把它记作 C，便得到方程的通解

$$y = Ce^{x^2}.$$

例 2 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{x} = -1$$

满足初始条件 $y\big|_{x=1} = 1$ 的特解.

解 方程两边同时对 x 积分，得

$$\int ydy = \int -xdx$$

因此有 $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$

或 $x^2 + y^2 = 2C$

把初始条件 $y\big|_{x=1} = 1$ 代入上式，求得 C=1。于是所求曲线的方程为

$$x^2 + y^2 = 2.$$

二、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (6\text{-}2\text{-}2)$$

的方程，称为一阶线性微分方程，其中 P(x) 和 q(x) 都是 x 的连续函数.

若 $q(x) \equiv 0$，方程(6-2-2)成为

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}3)$$

称方程(6-2-3)为一阶齐次线性微分方程.

若 $q(x) \neq 0$ 方程(6-2-2)称为一阶非齐次线性微分方程，并称方程（6-2-3）为（6-2-2）所对应的一阶齐次线性微分方程.

（1）**常数变易法**

此法解微分方程的步骤为

（i）先求方程（6-2-2）所对应的齐次方程（6-2-3）的通解.

由于（6-2-3）是可分离变量的微分方程，所以它的通解为

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad \text{（C 为任意常数）} \qquad (6\text{-}2\text{-}4)$$

（ii）再求出方程（6-2-2）的通解.

在（6-2-4）式中，考虑用函数 $C(x)$代替 C 后作为方程（6-2-2）的解，将简化方程的表达式.如果函数 $C(x)$能够确定，则方程的通解即可求出.这种方法是一种较高级的技巧方法，通常称为常数变易法.

设方程（6-2-2）的解为

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

则
$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}[-p(x)]$$

代入方程（6-2-2）有

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

整理后，得

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

两边积分，得

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

即 C(x)能够确定.因此方程(6-2-2)的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C]. \qquad (6\text{-}2\text{-}5)$$

(2)**公式法**

直接利用公式(6-2-5)求解方程(6-2-2)的方法称为公式法.

例3 求方程

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{5/2}$$

的通解.

解法 1 利用常数变易法.

先求其对应的齐次微分方程的通解

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx$$

两边积分，得

lny=2ln(x+1)+lnC

$$y = C(x+1)^2$$

再用常数变易法求线性非齐次方程的通解. 令此通解为

$$y = C(x)(x+1)^2$$

则有 $$y' = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1)$$

代入原方程，得

$$C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2 = (x+1)^{5/2}$$

$$C'(x) = (x+1)^{1/2}$$

$$C(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \qquad \text{（C 为任意常数）}$$

故原方程的通解为

$$y = (x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\right).$$

解法 2 利用公式（6-2-5）求解.

此时 $p(x) = -\frac{2}{x+1}$， $q(x) = (x+1)^{5/2}$，

代入公式(6-2-5)得原方程的通解为

$$y = e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left(\int (x+1)^{5/2} e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{2\ln(x+1)}\left(\int (x+1)^{5/2} e^{-2\ln(x+1)}dx + C\right)$$

$$= (x+1)^2\left(\int (x+1)^{1/2}dx + C\right)$$

$$= (x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\right). \qquad \text{（C 为任意常数）}$$

习题 6-2

1． 求解下列微分方程

（1） $y' = e^{x+y}$

（2） $xy' = y\ln y$

（3） $xdy - 3ydx = 0$， $y\big|_{x=1} = 1$

（4） $(1+e^x)yy' = e^x$， $y\big|_{x=0} = 1$

2． 求解下列微分方程

（1） $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

（2） $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

（3） $y' + 2xy + 2x^3 = 0$

（4） $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$， $y\big|_{x=1}=0$

（5） $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x$， $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$

§6-3　二阶微分方程

一、 可降阶的二阶微分方程

如果一个二阶微分方程可通过积分或通过变量替换降为一阶微分方程,则此二阶微分方程称为**可降阶的二阶微分方程**.其一般形式为

$$y''=f(x) \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

或

$$y''=f(x,y') \qquad (6\text{-}3\text{-}2)$$

形如（6-3-1）的方程，可经过两次积分求出通解.例如§6－1中例2的（6-1-5）式就这种类型的方程.

形如(6-3-2)的方程，其特点是右端不含 y,若设

$$y'=t$$

则

$$y''=\frac{dt}{dx}=t'$$

方程(6-3-2)式可化为

$$t'=f(x,t)$$

这是关于自变量 x、未知函数 t=t(x)的一阶微分方程，从而可试用§6－2 节所述的方法来解，最后通过积分求出 y 的表达式.

例 1 解微分方程

$$y''=\frac{1}{x}y'+xe^x.$$

解 令 $y'=t$ 则 $y''=t'$

于是

$$t'=\frac{1}{x}t+xe^x$$

即

$$t'-\frac{1}{x}t=xe^x$$

这是关于 t 的一阶线性微分方程.其中 $p(x)=-\dfrac{1}{x}$， $q(x)=xe^x$

因此有

$$y'=t=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^x\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)$$

$$=e^{\ln x}\left(\int xe^x\cdot e^{\ln\frac{1}{x}}dx+C_1\right)$$

$$=x(e^x+C_1)$$

从而，原方程的通解为

$$y=\int x(e^x+C_1)dx=(x-1)e^x+\frac{C_1}{2}x+C_2.$$

二、二阶常系数线性微分方程

形如

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad （6-3-3）$$

的二阶微分方程称为**二阶常系数线性微分方程**，其中 p、q 为（实）常数，f(x)是 x 的已知函数.

若 $f(x)\equiv 0$, 方程(6-3-3)变为

$$y''+py'+qy=0 \qquad (6-3-4)$$

称为二阶常系数齐次线性微分方程.

若 f(x)≠0, 方程(6-3-3)称为二阶常系数非齐次线性微分方程，并称(6-3-4)为(6-3-3)所对应的齐次方程.

（1）**二阶常系数线性微分方程解的结构**

（i）齐次方程(6-3-4)的解的结构

定理 1 如果函数 y_1 与 y_2 是方程(6-3-4)的两个解，那么

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \qquad (6-3-5)$$

也是方程(6-3-4)的解, 其中 C_1， C_2 是任意常数.

证明 将公式(6-3-5)代入方程(6-3-4)的左边，得

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2)$$

$$=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2)$$

由于 y_1 和 y_2 是方程(6-3-4)的解，即

$$y_1''+py_1'+qy_1=0$$

$$y_2''+py_2'+qy_2=0$$

因此 $$(C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2)=0$$

所以公式(6-3-5)是方程(6-3-4)的解.

这个定理说明，方程(6-3-4)的两个解的线性组合仍然是其解，但并不一定是通解. 例如, $y_1=\sin 2x$ 和 $y_2=2\sin 2x$ 都是方程 $y''+4y=0$ 的解，但

$$C_1y_1+C_2y_2=C_1\sin 2x+2C_2\sin 2x=(C_1+2C_2)\sin 2x=C\sin 2x$$

（其中 $C = C_1 + 2C_2$ ）只含有一个独立的任意常数 C，所以它不是二阶微分方程 $y'' + 4y = 0$ 的通解.

那么在什么条件下公式(6-3-5)才是方程(6-3-4)的通解呢？为解决此问题，我们给出函数线性相关和线性无关的定义.

当 $\dfrac{y_2}{y_1} =$ 常数时，我们称 y_1 与 y_2 **线性相关**；当 $\dfrac{y_2}{y_1} \neq$ 常数时，我们称 y_1 与 y_2 **线性无关**.

定理 2 若 y_1 与 y_2 是方程（6-3-4）的两个线性无关的特解，则 $C_1 y_1 + C_2 y_2$（C_1，C_2 为任意常数）是方程（6-3-4）的通解.

（ii）非齐次方程（6-3-3）的解的结构

定理 3 如果 y_0 是非齐次微分方程（6-3-3）的一个特解，而 $y*$ 是对应的齐次方程（6-3-4）的通解，则 $y = y_0 + y*$ 是非齐次方程(6-3-3)的通解.

(2) **二阶常系数线性微分方程的解法**

(i) **二阶常系数齐次线性微分方程的解法**

由前面对微分方程解的结构的讨论我们知道，求齐次方程(6-3-4)的通解归结为求它的两个线性无关的特解. 根据方程(6-3-4)本身的特征，形如 $y = e^{rx}$ （r 为待定常数）的函数一定适合方程. 为了确定出 r，将 $y = e^{rx}$ 代入方程(6-3-4)

由于 $y' = re^{rx}$， $y'' = r^2 e^{rx}$　　于是有

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

因为 $e^{rx} \neq 0$，所以有

$$r^2 + pr + q = 0 \qquad (6\text{-}3\text{-}6)$$

可见，方程(6-3-4)有无特解与关于 r 的二次代数方程(6-3-6)的解有关. 即 $y = e^{rx}$ 是方程(6-3-4)的解的充分必要条件是 r 是方程(6-3-6)的根.

特征方程和特征根 关于 r 的二次代数方程(6-3-6)称为方程(6-3-4)的**特征方程**，特征方程的两个根称为**特征根**. 记为 r_1、 r_2.

由于 r_1、r_2 有三种不同的情形，因此根据 r_1、r_2 的不同情形，我们可以得到方程(6-3-4)的不同的通解.

当 $r_1 \neq r_2$ 时，方程(6-3-4)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \qquad (6\text{-}3\text{-}7) \qquad （C_1、C_2 为任意常数）$$

当 $r_1 = r_2 = r$ 时，方程(6-3-4)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = (C_1 + C_2 x) e^{rx} \qquad (6\text{-}3\text{-}8) \qquad （C_1、C_2 为任意常数）$$

当 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$（$\alpha$、$\beta$ 为实数；$\beta \neq 0$）时，方程(6-3-4)的通解

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (6\text{-}3\text{-}9) \qquad （C_1、C_2 为任意常数）$$

例 2 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

特征根为 r_1=3，r_2=−1，所以由公式（6-3-7）得方程的通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

例 3 求方程 $y'' - 4y'' + 4y = 0$ 的通解.

解 特征方程 $r^2 - 4r + 4 = 0$ 有重根

$$r_1 = r_2 = r = 2$$

所以由公式（6-3-8）得方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}.$$

例4 求方程 $y'' - 4y' + 13 = 0$ 的通解

解 特征方程 $r^2 - 4r + 13 = 0$ 有一对共轭复根

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i$$

所以由公式（6-3-9）得，方程的通解为

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

（ii）**二阶常系数非齐次线性微分方程的解法**

定理 3 告诉我们，求非齐次微分方程（6-3-3）的通解归结为求它的一个特解 y_0 及对应的齐次方程（6-3-4）的通解 $y*$，然后取和式 $y = y_0 + y*$，即求得方程（6-3-3）的通解. 而齐次方程（6-3-4）的通解我们已经会求，剩下的问题是如何求非齐次方程（6-3-3）的一个特解.

显然，方程(6-3-3)的特解 y_0 与函数 f(x)有关，一般采用的方法是对在实际问题中，f(x)的常见的几种形式进行观察，推测出特解 y_0. 下面通过例子了解这种方法.

例5 求方程 $y''+y=2x^2-3$ 的一个特解.

解 因为 f(x)=$2x^2-3$ 是一个二次多项式，所以对方程进行观察可知，方程的特解也应是一个二次多项式。设为

$$y_0=Ax^2+Bx+C$$

其中 A、B、C 为待定系数，为求得这三个系数，将 y_0 求导，得

$$y_0{}'=2Ax+B \qquad y_0{}''=2A$$

把它们代入原方程，得

$$2A+Ax^2+Bx+C=2x^2-3$$

即 $$Ax^2+Bx+(2A+C)=2x^2-3$$

从而有 $$\begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ 2A+C=-3 \end{cases}$$

解此方程组，得 A=2，B=0，C=-7

故，所求方程的一个特解为 $y_0=2x^2-7$.

例6 求微分方程 $y''-2y'-3y=3xe^{2x}$ 得通解.

解 该方程所对应的齐次方程为

$$y''-2y'-3y=0$$

其通解按前面方法求得

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

由于 $f(x)=3xe^{2x}$，通过对方程观察可知，原方程的特解应为一次多项式与 e^{2x} 的乘积. 设其为 $$y_0=(Ax+B)e^{2x}$$

代入原方程，得

$$[(Ax+B)e^{2x}]''-2[(Ax+B)e^{2x}]'-3(Ax+B)e^{2x}=3xe^{2x}$$

即 $$[-3Ax+(2A-3B)]e^{2x}=3xe^{2x}$$

从而有 $\begin{cases} -3A=3 \\ 2A-3B=0 \end{cases}$

解此方程组，得 A=-1， $B=-\dfrac{2}{3}$

于是方程的一个特解为

$$y_0=(-x-\frac{2}{3})e^{2x}$$

故，所求方程的通解为

$$y=(-x-\frac{2}{3})e^{2x}+C_1e^{3x}+C_2e^{-x}.$$

习题 6-3

1．求解下列微分方程

（1） $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$

（2） $x^2y''+xy'=1$

（3） $y''(x^2+1)=2xy'$， $y(0)=1$， $y'(0)=3$

2．求下列微分方程的解

（1） $y''-2y'+y=0$

（2） $y''-9y=0$

（3） $4y''+4y'+y=0$， y(0)=2， $y'(0)=0$

（4） $\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+s=0$， $s\big|_{t=0}=4$， $\dfrac{ds}{dt}\big|_{t=0}=2$

3．求下列微分方程的解

（1） $y''-y=-5x$

（2） $2y''+y'-y=2e^x$

§6-4 微分方程应用举例

微分方程在实际问题中有着广泛的应用，下面举几个应用方面的例子.

先看利用微分方程寻求实际问题中未知函数的一般步骤：

（1）分析问题，设出所求未知函数，建立微分方程，确定初始条件；

（2）求出微分方程的通解；

（3）根据初始条件确定通解中的任意常数，求出微分方程相应的特解.

例 1 某房间室温为 20^oC，有一个 100^oC 的物体，在室内经过 20 分钟温度降为

60^oC，问经过多少时间,温度才能降到30^oC？

解 设 t 时刻物体温度为 T(t)，冷却速度即温度对时间 t 的变化率为$\frac{dT}{dt}$，物体和环境的温差为 T-20.由物体在空气中的冷却速度与物体和环境的温度差成正比（冷却定律），得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20) \qquad (6\text{-}4\text{-}1)$$

其中 k>0 为比例系数，负号是因为温度下降，$\frac{dT}{dt}<0$而 T-20>0 的缘故.初始条件为 T(0)=100.

先求方程的通解，得

$$T(t)=20+Ce^{-kt} \qquad (6\text{-}4\text{-}2)$$

再求方程的特解.

把初始条件 T(0)=100 代入公式(6-4-2)，得 C=80

从而有 $$T(t)=20+80e^{-kt} \qquad (6\text{-}4\text{-}3)$$

把 T(20)=60 代入公式(6-4-3),得

$$k=\frac{1}{20}\ln 2$$

由此得到方程的特解为

$$T(t)=20+80e^{-\frac{t}{20}\ln 2} \qquad (6\text{-}4\text{-}4)$$

最后将 T(t)=30 代入公式(6-4-4),得 t=60

故经过 60 分钟，温度将降到30^oC.

例 2 如图 6-1 所示的 RC 电路，已知在开关 K 合上前电容 C 上没有电荷，电容 C 两端的电压为零，电源电压为 E，把开关合上，电源对电容 C 充电，电容 C 上的电压U_C逐渐升高，求电压U_C随时间 t 变化的规律.

解 根据回路电压定律，电容 C 上的电压U_C与电阻 R 上的电压 RI 之和等于电源电压 E，即

$$U_C+RI=E \qquad (6\text{-}4\text{-}5)$$

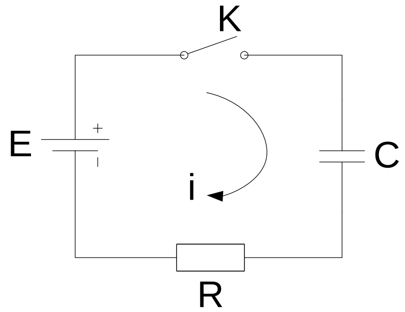

图 6-1

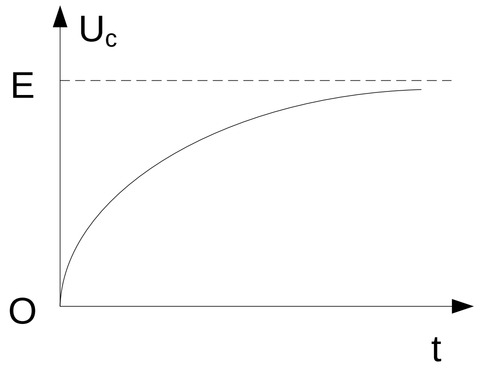

图 6-2

电容充电时，电容上电量 Q 逐渐增加，按电容性质，Q 与U_C有关系式　Q$=CU_C$

于是　$I=\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{d(CU_C)}{dt}=C\dfrac{dU_C}{dt}$，代入公式（6-4-5），得

$$RC\frac{dU_C}{dt}+U_C=E \qquad (6\text{-}4\text{-}6)$$

微分方程（6-4-6）是可分离变量的微分方程，其中 R、C、E 都是常数，利用分离变量法求得通解为

$$U_C=E-Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

把初始条件$U_C\big|_{t=0}=0$代入通解，得 A=E

于是　$U_C=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$

这就是电压U_C随时间 t 的变化规律，即电容器的充电规律.

由图 6-2 可以看出，充电时U_C随着时间 t 的增加越来越接近于电源电压 E.

例4 一弹簧上断固定，下端挂一质量为 0.025 千克的物体，先将物体用手拉到离平衡位置 0.04 米处，然后放手，让物体自由振动，若弹簧的弹性系数 C=0.625 牛顿/米，阻力大小与运动速度的大小成正比，方向相反，阻尼系数$\mu=0.25$牛顿• 秒/米，求物体的运动规律.

解 如图 6-3 所示，取铅直向下的方向为 x 轴的正方向，平衡位置 O 为坐标原点，由牛顿运动定律 ma=F 得微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+Cx=0$$

即 $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{C}{m}x=0$$

把 m=0.025, $\mu=0.25$，C=0.625 代入上式并整理后,得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+10\frac{dx}{dt}+25x=0$$

上式是一个二阶常系数齐次线性微分方程，它的特征方程为

$$r^2+10r+25=0$$

特征根为$r_1=r_2=-5$，因此方程的通解为

$$x=e^{-5t}(C_1+C_2t)$$

对 t 求导,得

$$x'=e^{-5t}(-5C_2t+C_2-5C_1)$$

把初始条件$x\big|_{t=0}=0.04$及$x'\big|_{t=0}=0$分别代入得：

$$\begin{cases} C_1=0.04 \\ C_2-5C_1=0 \end{cases}$$

解得 $C_1=0.04$， $C_2=0.2$

因此方程的特解为

$$x=e^{-5t}(4+20t) \qquad （厘米）$$

这就是物体的运动规律.

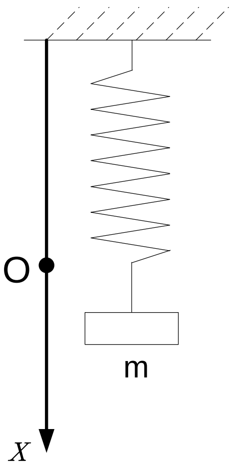

图 6-3

习题 6-4

1. 已知曲线在任一点处的切线斜率等于这个点的纵坐标，且曲线通过点（0，1），求该曲线的方程.

2. 设物体运动的速度与物体到原点的距离成正比，已知物体在 10 秒钟时与原点相距 100 米，在 15 秒钟时与原点相距 200 米，求物体的运动规律.

3. 设有一桶，内盛盐水 100 升，其中含盐 50 克，现在以浓度为 2 克/升的盐水流入桶中，其流速为 3 升/分，假使流入桶内的新盐水和原有盐水，因搅拌而能在顷刻间成为均匀的溶液，此溶液又以 2 升/分的流速流出，求 30 分钟时，桶内所存盐水的含盐量.

4. 一质点运动的加速度为$a=-2v-5s$，如果该质点以初速度$v_0=2$米/秒由原点出发，试求质点的运动方程.