第五章　定积分及其应用

定积分是积分学的又一重要概念。自然科学与生产实践中的许多问题，如平面图形的面积、曲线的弧长、水压力，变力做功等都可以归结为定积分问题。本章将从两个实际问题中引出定积分的概念，然后讨论定积分的性质及定积分与不定积分的内在联系。

§5-1 定积分的概念及性质

一、定积分问题举例

1、曲边梯形的面积

曲边梯形是由两条直线都垂直第三条直线与一条曲线所围成的图形。为确定起见，我们一般取一条边（作为底）在 x 轴上，另两条边为 $x=a$ 和 $x=b$，顶部曲线的方程为 $y=f(x)$(如图 5-1)

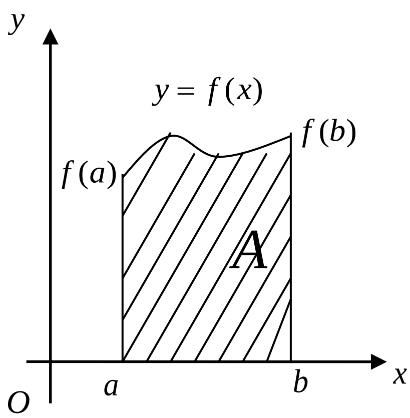

图 5-1

我们以前只会求由直线段和圆弧所围成的平面图形的面积。计算由任意形状的闭曲线所围成的平面图形面积，是一个一般的几何问题，这个问题只有用极限的方法才能得到比较完满的解决。

将曲边梯形分成若干个小曲边梯形（如图 5-2a），对每一个小曲边梯形我们用一个矩形来近似代替它，所有小矩形面积的总和（如图 5-2b）就是曲边梯形面积的近似值。小曲边梯形个数越多，就越接近于曲边梯形的面积，而当每个小曲边梯形的宽度趋于 0 时，就转化为曲边梯形的面积了。

具体实施步骤：

⑴分割区间

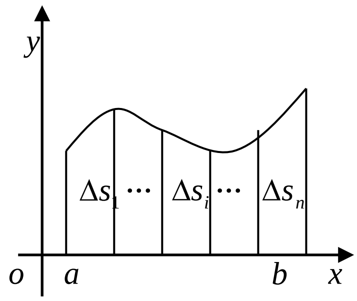

图 5-2a

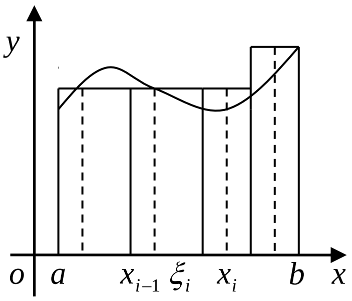

图 5-2b

在 $[a,b]$ 内插入 $n-1$ 个分点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 使

$$x_0 = a \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec x_n = b$$

这些分点将区间$[a,b]$分成n个子区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，记它们的长度为$\Delta x_i(i=1,2,\cdots n)$，用$\lambda$表示这些子区间的最大长度。显然$\lambda$的大小反映了对区间分割的粗细程度。通过此分割我们得到了n个“窄曲边梯形”$\Delta S_i(i=1,2,\cdots n)$，因此有$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$（如图 5-2a）

⑵近似代替（以直代曲），求和

在$[x_{i-1},x_i)$上任取一点ξ_i，用高为$f(\xi_i)$，宽为Δx_i的矩形面积近似代替“窄曲边梯形”面积ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$，于是得到曲边梯形的面积的近似值：

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = S_n$$ （如图 5-2b）

⑶取极限，求得面积精确值

可看出，随着分割的越来越细，即$\lambda \to 0$，S_n对S的逼近程度越好，于是有

$$S=\lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2、变速运动的路程

我们知道：已知物体作变速直线运动，路程随时间t的变化而变化的规律是$S=S(t)$，任意时刻速度为$V(t)=\frac{dS(t)}{dt}$。现在我们提出此问题的逆问题：已知物体运动的速度随时间变化的规律是$V=V(t)$，如何求物体在从a到b任意一段时间内走过的路程S？

我们知道，物体作等速运动时，计算路程的公式是

路程=速度$\times$时间

而在变速运动中，速度随时间变化，因此不能用等速运动的公式来计算。

同前面的问题一样，在一段很短的时间内，可用等速运动近似地代替变速运动，具体作法如下：

⑴分割区间

在时间$[a,b]$内插入$n-1$个分点$t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$使

$$t_0 = a \prec t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_{n-1} \prec t_n = b.$$

这些点将$[a,b]$分成了n个子区间$[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，若记物体在$[t_{i-1},t_i]$上运动的

路程为ΔS_i，则物体在整个时间区间$[a,b]$上运动的路程为$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$

⑵近似代替，求和

由于速度函数是连续的，所以时间区间很小时速度的变化也很小，在$[t_{i-1},t_i]$内任取一点ξ_i，可近似看作物体在$[t_{i-1},t_i]$内作速度为$V(\xi_i)$的匀速运动，走过的路程为$V(\xi_i)\Delta t_i$，这样，得到物体在$[a,b]$上运动的路程的近似值$S\approx\sum_{i=1}^{n}V(\xi_i)\Delta t_i$，并且分割越细越接近精确值。

⑶取极限，得路程之精确值

令$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$，则$S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}V(\xi_i)\Delta t_i$

就是物体在时间区间$[a,b]$内走过的路程的精确值。

上面两个例子中所要计算的量的实际意义虽然不同，但它们都决定于一个函数及其自变量的变化区间，如：

曲边梯形的面积由它的高度$y=f(x)$及其底边上的点x的变化区间$[a,b]$所决定；

变速直线运动的路程由速度$V=V(t)$及时间t的变化区间$[t_{i-1},t_i]$所决定。

其次，计算这些量的方法与步骤都是相同的，它们都归结为具有相同结构的一种特定和的极限。如

面积$A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，路程$S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}V(\xi_i)\Delta t_i$

抛开这些问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括，我们就可以抽象出下述定积分的定义。

二、定积分的定义

定义1 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入$n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\cdots,\ [x_{n-1},x_n]$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\ \cdots,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

在每个小区间$\left[x_{i-1}, x_i\right]$上任取一点$\xi_i$ $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$，作函数值$f(\xi_i)$与小区间长度$\Delta x_i$的乘积$f(\xi_i)$ Δx_i $(i=1,2,\cdots,n)$并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

记$\lambda=\max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right\}$，如果不论对$\left[a,b\right]$怎样分法，也不论在小区间$\left[x_{i-1}, x_i\right]$上点$\xi_i$怎样取法，只要当$\lambda \to 0$时，和$S$总趋于确定的极限$I$，这时我们称这个极限$I$为函数$f(x)$在区间$\left[a,b\right]$上的定积分（简称积分），记作$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I \tag{2}$$

其中$f(x)$叫做**被积函数**，$f(x)dx$叫做**被积表达式**，x叫做**积分变量**，a叫做**积分下限**，b叫做**积分上限**，$\left[a,b\right]$叫做**积分区间**。

利用定积分的定义，前面所讨论的两个实际问题可以分别表述如下：

曲边梯形的面积$A=\int_a^b f(x)dx$

变速直线运动物体所经过得路程$S=\int_a^b V(t)dt$

关于定积分的定义作以下 3 点说明：

⑴函数$f(x)$在闭区间$\left[a,b\right]$上可积有两个充分条件：$f(x)$在$\left[a,b\right]$上连续或在$\left[a,b\right]$上除有有限个第一类间断点外处处连续；

⑵定积分$\int_a^b f(x)dx$是乘积和的极限，它是一个数，与函数$f(x)$、区间$\left[a,b\right]$有关，而与积分变量的选择无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

⑶为了讨论方便，补充规定：

$$\int_a^a f(x)dx=0,\ \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

三、定积分的几何意义

由定积分可得：

在闭区间$\left[a,b\right]$上，若函数$f(x)\ge 0$，则$\int_a^b f(x)dx$在几何上表示由曲线$y=f(x)$、直线$x=a, x=b$，和x轴所围成的曲边梯形的面积；

在$[a,b]$上，若函数$f(x)\le 0$，则$\int_a^b f(x)dx$在几何意义上表示由曲线$y=f(x)$、直线$x=a,x=b$，和x轴所围成的曲边梯形（在x轴下方）的面积的相反数。

四、定积分的基本性质

性质 1 函数的和（差）的定积分等于它们的定积分的和（差），即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx \; 1$$

性质 1 对于任意有限个函数都是成立的.

性质 2 被积函数的常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \quad (k\text{是常数})$$

性质 3 如果将积分区间分成两部分，则在整个区间上的定积分等于这两部分区间上定积分之和，即设$a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

性质 4 如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx \quad (a<b)$$

性质 5 设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

这个性质说明，由被积函数在积分区间上的最大值及最小值，可以估计积分值的范围。它的几何解释是曲边梯形$aABb$的面积介于矩形$acdb$和$aefb$的面积之间。（如图 5-3）

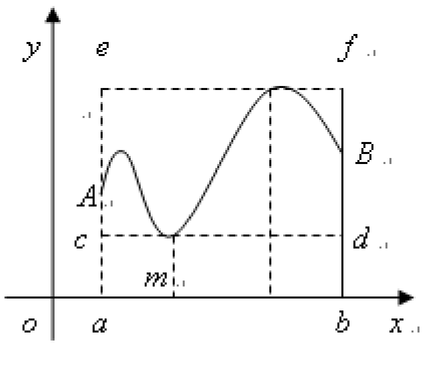

图 5-3

性质 6（定积分中值定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在积分区间$[a,b]$上至少存在一点ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a) \quad (a\le\xi\le b)$$

这个公式叫做**积分中值公式**。

中值公式的几何解释是：在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积（如图5-4）

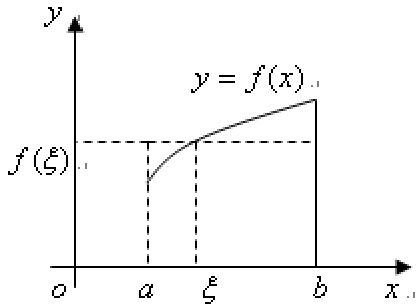

图 5-4

性质 7（对称区间上奇偶函数的积分性质）

⑴若函数$f(x)$在$[-l,l]$上连续且为偶函数，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$$

⑵若函数$f(x)$在$[-l,l]$上连续且为奇函数，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$$

定积分基本定理

1、 变上限的积分函数

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则对区间$[a,b]$上任意一点x，$f(x)$在区间$[a,x]$上仍连续，所以定积分

$$\int_{a}^{x} f(x)dx$$

存在。这时变量x既表示积分上限，又表示积分变量。由于定积分与积分变量的记法无关，为避免混淆，把积分变量x换成t，于是有

$$\int_{a}^{x} f(t)dt$$

显然，当积分上限x在$[a,b]$上任意变动时，$\int_{a}^{x} f(t)dt$就是变上限的定积分。这时，对于每一个取定的x值，定积分有一个对应的值，所以$\int_{a}^{x} f(t)dt$是积分上限x的函数，此函数定义在闭区间$[a,b]$上，把这样的函数叫做**变上限的积分函数**，记作$\phi(x)$，即

$$\phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt \quad (a \le x \le b)$$

函数$\phi(x)$ $(a \le x \le b)$具有下面的重要性质。

定理 1（**微积分第一基本定理**）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则变上限的积分函数 $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且有 $\phi'(x)=f(x)$，其中 $x\in[a,b]$

例 1 设 $\phi(x)=\int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt$,求 $\phi'(x)$

解 $\phi'(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x^2)$

定理 2（**微积分第二基本定理**）如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的任意一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

为方便起见，我们把 $F(b)-F(a)$ 记成 $F(x)\big|_a^b$，于是上述公式可写成

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$$

此公式叫做**牛顿（Newton）-莱布尼兹（Leibniz）公式**，也叫做**微积分基本公式**。这个公式揭开了定积分与被积函数的原函数间的联系，它说明一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量，这就为定积分的计算提供了一个有效而简单的方法。

例 1 计算 $\int_0^1 x^2dx$

解 $\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

例 2 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

解 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\big|_{-1}^1=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$

例 3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$

$$=\tan x\big|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0)-(\frac{\pi}{4}-0)$$

$$=1-\frac{\pi}{4}$$

例 4 计算 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$

解 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$

例 5 计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积。

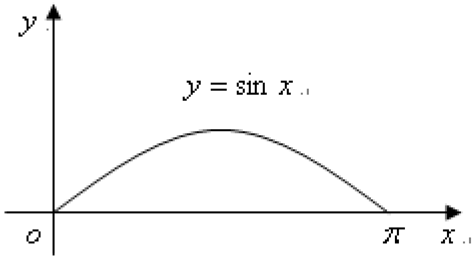

图 5-5

解 这图形是曲边梯形的一个特例，它的面积为

$$A=\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=-(-1)-(-1)=2$$

习题 5-1

1、利用定积分的定义计算下列积分：

(1) $\int_a^b xdx\quad(a<b)$　　(2) $\int_a^b kdx\quad(k\text{是常数})$

(3) $\int_0^1 e^x dx$

2、利用定积分的几何意义，说明下列等式：

(1) $\int_0^1 2xdx=1$　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=0$

3、计算下列积分：

(1) $\int_1^3 x^3dx$　　(2) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(4) $\int_0^{\sqrt{3}a}\frac{dx}{a^2+x^2}$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\frac{x}{2}dx$　　(6) $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$

4、设 $\phi(x)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$，求 $\phi'(2)$

5、利用函数的奇偶性计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin xdx$　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta d\theta$

§5-2 定积分的换元积分法

上一节中的微积分基本公式建立了定积分与不定积分之间的联系，利用这个公式和求不定积分的法则就可以解决定积分的计算问题。而在求不定积分中换元法是一个十分重要的方法，因而在一定条件下，也可用换元法来计算定积分. 本节将介绍定积分的换元法。

先来看一个例子。

例 求定积分$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \quad (|x|\le a)$

解 设$x=a\sin t$，则$dx=a\cos t dt$

所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}dt=a^2\int\cos^2 tdt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})+c$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c$$

于是

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})\Big|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}$$

如果在换元的同时，我们将x的上、下限按代换$x=a\sin t$相应的换成t的上、下限，即

当$x=0$时，$t=0$；当$x=a$时，$t=\frac{\pi}{2}$，则

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

这样，运算步骤得到了简化。这种方法叫做**定积分的换元法**。

定理 假设

⑴函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续；

⑵函数$x=\varphi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上是单值的且具有连续导数；

⑶当t在区间$[\alpha,\beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，且$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$

在这些条件下，则有定积分的换元公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

利用牛顿-莱布尼兹公式就可以证明这个定理，这里略。

我们指出，换元公式对于$a>b$也是适用的。

由这个定理可以知道，通过变换$x=\varphi(t)$把原来的积分变量x变换成新变量t时，在求出原函数后可不必把它变回成原变量x的函数，只要相应改变积分上、下限即可.但这样做的时候，必须注意定理的条件，否则就会得出错误的结论。

例1 计算$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

解 令$\sqrt{x}=t$，则当$x=0$时，$t=0$；当$x=4$时，$t=2$；

代入积分

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}dt = 2\int_0^2 (1-\frac{1}{1+t})dt = 2\left[t-\ln(1+t)\right]_0^2 = 2(2-\ln 3)$$

例 2 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 设 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t dt$，且

当 $x=0$ 时，$t=0$； $x=\frac{1}{2}$ 时， $t=\frac{\pi}{6}$

于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = (\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

换元公式也可以反过来使用，为使用方便起见，把换元公式左右两边对调地位，同时把 t 改记为 x，而 x 改记为 t，得

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

这样，我们可以用 $t=\varphi(x)$ 来引入新变量 t

例 3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

解 设 $t=\cos x$，则 $dt=-\sin x dx$，且

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = (\frac{t^6}{6})\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

在例 3 中，如果我们不明显的写出新变量 t，那么，定积分的上、下限就不要改变，现在用这种方法计算如下：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d(\cos x) = -(\frac{\cos^6 x}{6})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-\frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$$

例 4 计算 $\int_0^R h\sqrt{R^2-h^2}dh$ (R为常数)

解 由于 $hdh = \frac{1}{2}d(h^2) = -\frac{1}{2}d(R^2-h^2)$

所以

$$\int_0^R h\sqrt{R^2-h^2}dh = -\frac{1}{2}\int_0^R \sqrt{R^2-h^2}d(R^2-h^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(R^2-h^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R$$

$$= -\frac{1}{3}(0-R^3) = \frac{R^3}{3}$$

例 5 计算$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$

解 由于$\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}=\sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|$

在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$|\cos x|=\cos x$；在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上，$|\cos x|=-\cos x$，所以

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x(-\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x$$

$$=\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{5}-(-\frac{2}{5})=\frac{4}{5}$$

注意：如果忽略了$\cos x$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上非正，而按

$$\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sin^{\frac{3}{2}} xcox$$

计算，将会导致错误。

习题 5-2

计算下列定积分：

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{3})dx$

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi$

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 udu$

(5) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$

(6) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy$

(7) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

(8) $\int_0^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

(9) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

(10) $\int_1^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(11) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}}$

(12) $\int_0^{1}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(13) $\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}dx$　　(14) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(15) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 2xdx$　　(16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$

§5-3 定积分的分部积分法

在计算不定积分时有分部积分法，相应地，计算定积分也有分部积分法.

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数 $f'(x),g'(x)$，则有

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

分别求等式两端在上 $[a,b]$ 的定积分.

$$\int_a^b [f(x)g(x)]'dx = \int_a^b g(x)f'(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

即

$$[f(x)g(x)]\Big|_a^b = \int_a^b g(x)f'(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

于是

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

也可以写成

$$\int_a^b f(x)dg(x) = [f(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

这就是定积分的分部积分公式.

例 1 计算 $\int_0^\pi x\cos xdx$

解　与前面求不定积分的方法很相似

$$\int_0^\pi x\cos xdx = \int_0^\pi xd\sin x = (x\sin x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin xdx = (0-0)-(-\cos x)\Big|_0^\pi = -2$$

例 2 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx$

解　$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx = (x\arcsin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} xd\arcsin x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例 3 计算 $\int_0^1 xe^x dx$

解 $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 xde^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$.

例 4 计算$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

解 先用换元法令$\sqrt{x} = t$，则$x = t^2$，$dx = 2tdt$，

且当$x = 0$时，$t = 0$；当$x = 1$时，$t = 1$.

于是 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^1 te^t dt$

再用分部积分法计算上式右端的积分，因为

$$\int_0^1 te^t dt = \int_0^1 tde^t = te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t\Big|_0^1 = 1$$

因此

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = 2.$$

习题 5-3

计算下列积分：

(1) $\int_0^1 xe^{-x} dx$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$；

(3) $\int_1^e x \ln x dx$； (4) $\int_1^2 x \log_2^x dx$；

(5) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t dt$ (ω为常数)； (6) $\int_0^1 x \arctan x dx$；

(7) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$； (8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$；

(9) $\int_0^{e-1} \ln(1 + x) dx$； (10) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

§5-4 定积分的应用

本节课将应用前面学过的定积分的基本理论和计算方法来分析和解决一些实际问题.定积分的应用很广泛，在自然科学和生产实践中，有许多实际问题最后都可归结为定积分的问题.

一、平面图形的面积

例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x, y = x^2$所围成的图形面积.（如图 5-6）

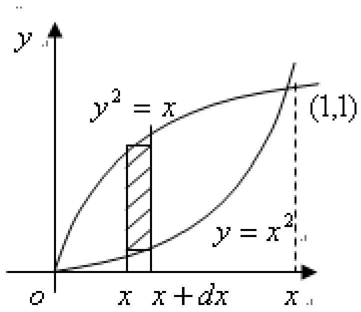

图 5-6

解 为了具体定出图形的所在的范围，先求出这两条抛物线的交点，为此解方程组

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$ 及 $x=1, y=1.$

即这两条抛物线的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$，从而知道这图形在直线 $x=0$ 及 $x=1$ 之间.

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄曲边梯形的面积近似于高为 $\sqrt{x}-x^2$，底为 dx 的窄矩形的面积，从而得到面积元素

$$dA = (\sqrt{x}-x^2)dx.$$

于是所要求的面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

一般地，如果函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且当 $x\in[a,b]$ 时 $f(x)\ge g(x)$，则介于两条曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 以及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的图形的面积元素（如图 5–7 中的阴影部分）为

$$dA = [f(x)-g(x)]dx$$

因而此图形的面积为

$$A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

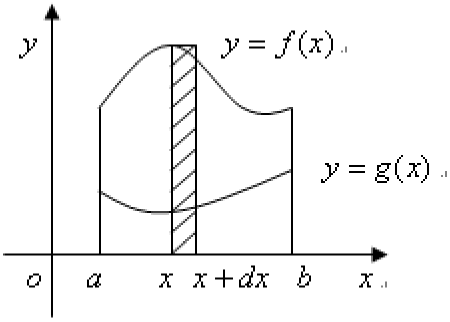

图 5-7

积分变量也可以选 y，但一道题中积分变量选取的适当，就可以使计算简单，如例 1，若以 y 为积分变量，则如何计算？作为大家练习内容.

某些平面图形,用极坐标来计算它们的面积比较方便.设由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成一图形（简称为曲边扇形），现在要计算它的面积（如图 5-8）这里假定 $\theta\in[\alpha,\beta]$时，$\varphi(\theta)\geq 0$.

由于当 θ 在 $[\alpha,\beta]$ 上变动时，极经 $r=\varphi(\theta)$ 也随之变动，因此，所求图形的面积不能直接利用圆扇形面积的公式 $A=\frac{1}{2}R^2(\beta-\alpha)$ 来计算.

取极角 θ 为积分变量，它的变化区间为 $[\alpha,\beta]$，对于区间 $[\alpha,\beta]$ 上的任一小区间 $[\theta,\theta+d\theta]$ 所对应的窄曲边梯形，我们可以用半径为 $r=\varphi(\theta)$，中心角为 $d\theta$ 的圆扇形来近似替代，从而得到这窄曲边梯形面积的近似值，即曲边扇形的面积元素

$$dA=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta$$

于是所求曲边扇形的面积为

$$A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta.$$

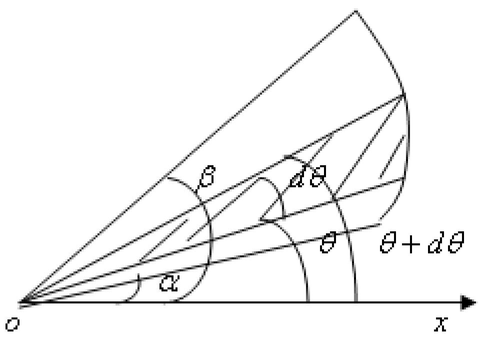

图 5-8

例 2 计算阿基米德螺线 $r=a\theta$ $(a\succ 0)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围

成的图形（如图 5-9）的面积。

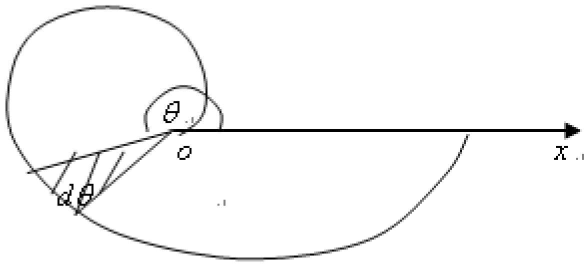

图 5-9

解 取θ为积分变量，在θ的变化区间$[0,2\pi]$上任取一小区间$[\theta,\theta+d\theta]$，在此小区间上以半径为$a\theta$，中心角为$d\theta$的圆扇形面积近似代替窄曲边扇形的面积，得曲边扇形的面积元素

$$dA=\frac{1}{2}(a\theta)^2d\theta$$

从而所要求的面积

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\theta^2d\theta=\frac{a^2}{2}(\frac{\theta^3}{3})\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3。$$

二、体积

1、平行截面面积为已知的立体体积

设一立体位于过点$x=a$，$x=b$且垂直于x轴的两个平面之间，用过点x且垂直于x轴的平面截此立体，设所得截面的面积为$A(x)$，且$A(x)$是x的已知连续函数. 下面求该立体的体积V（如图 5-10）

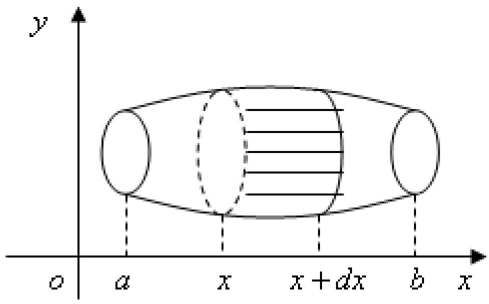

图 5-10

取x为积分变量，$x\in[a,b]$，在区间$[a,b]$上任取一小区间$[x,x+dx]$，该区间上的小立体的体积可以用底面积为$A(x)$，高为dx的柱体的体积近似代替. 因此体积微元

$dV=A(x)dx$从而 $V=\int_a^bA(x)dx$ (1) .

例 3 一平面经过半径为R的正圆柱体的底圆中心，与底面交成α角，求这平面截圆柱体所得立体的体积（如图 5-11）

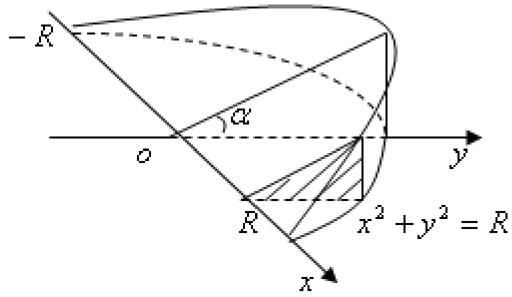

图 5-11

解 取这平面与正圆柱底面的交线为 x 轴，底面上过圆心且垂直于 x 轴的直线为 y 轴，建立直角坐标系，于是底面圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$，取 x 为积分变量，$x\in\left[-R,R\right]$，立体中过点 x 且垂直于 x 轴的截面是直角三角形，它的两条直角边分别为 $\sqrt{R^2-x^2}$ 和 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$，因此截面面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

由⑴式得所求立体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\frac{1}{2}\tan\alpha(R^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^2\tan\alpha .$$

2、旋转体的体积

旋转体是一个平面图形绕这平面内的一条直线旋转而成的立体，这条直线叫做旋转轴.

如图 5-12 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转而成的旋转体. 现在计算该旋转体的体积 V .

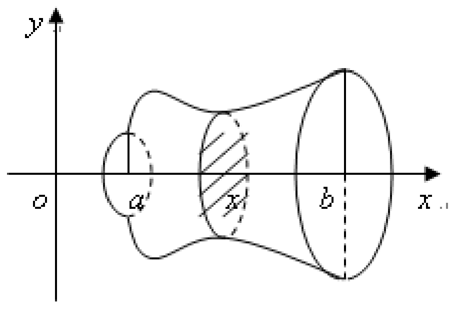

图 5-12

过区间 $\left[a,b\right]$ 上任一点，作垂直于 x 轴的横截面，它是一个半径为 $y=f(x)$ 的圆，因此横截面的面积是

$$A(x)=\pi y^2=\pi\left[f(x)\right]^2$$

由⑴式，所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (2)$$

类似的，由曲线$x=\varphi(y)$，直线$y=c$，$y=d$及y轴所围成的曲边梯形（如图 5-13）绕y轴旋转而成的旋转体体积为$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$.

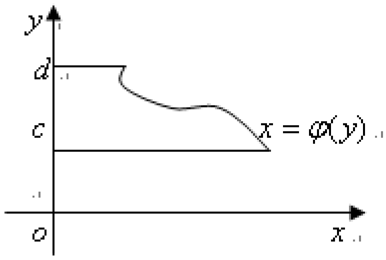

图 5-13

例 4 计算底半径为r，高为h的圆锥体的体积（如图 5-14）

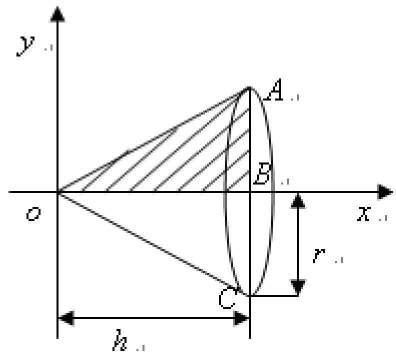

图 5-14

解 如图建立坐标系，圆锥体可以看成由直角三角形OAB绕x轴旋转而成的旋转体.直线OA的方程为

$$y=\frac{r}{h}x \quad (0\le x\le h)$$

由⑵式得所求圆锥体的体积为

$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h(\frac{r}{h}x)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}(\frac{x^3}{3})\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h\text{。}$$

三、平面曲线的弧长

设有光滑曲线$y=f(x)$（即$f'(x)$是连续的），求从$x=a$到$x=b$的对应的一段弧的长度s（如图 5-15）。

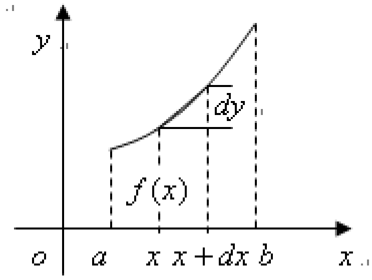

图 5-15

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$，如果函数 $y=f(x)$ 具有一阶连续导数，则曲线 $y=f(x)$ 上相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+dx]$ 的一段弧的长度，可以用该曲线在点 $(x,f(x))$ 处的切线上相应的一小段的长度来近似代替. 而切线上这相应的小段的长度为

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx$$

从而得弧长元素

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$$

将弧长元素在闭区间 $[a,b]$ 上作定积分，便得到所要求的的弧长

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx \tag{3}$$

对于有些曲线，利用参数方程来计算它的弧长比较方便。

设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad （\alpha\le t\le\beta）$$

并且 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，这时弧长微元为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt.$$

从而所求的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt. \tag{4}$$

例 5 求曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 0 到 3 的一段弧的长度

解 $y'=x^{\frac{1}{2}}$，由⑶式得所求弧长为

$$s=\int_0^3\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^3\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{14}{3}$$

例 6 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$（$a>0$）一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的长度

解 $x'(t) = a(1-\cos t)$，$y'(t) = a\sin t$

因此 $ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}dt = a\sqrt{4\sin^2(\frac{t}{2})}dt$

因为当 $0 \le t \le 2\pi$ 时，$0 \le \frac{t}{2} \le \pi$. 所以 $\sin(\frac{t}{2}) \ge 0$

于是 $ds = 2a\sin(\frac{t}{2})dt$

从而摆线一拱的长度为

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 4a(-\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

习题 5-4

1、求下列平面曲线所围成图形的面积：

⑴ $y = x^2$，$y = 1$

⑵ $y = \frac{1}{x}$，$y = x$，$x = 2$

⑶ $y = x^2$，$y = x$，$y = 2x$

2、求曲线 $r = 2a\cos\theta$ 所围成图形的面积。

3、计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体的体积。

4、求下列曲线所围成的图形绕指定轴旋转所得到的旋转体的体积：

⑴ $2x - y + 4 = 0$，$x = 0$ 及 $y = 0$，绕 x 轴

⑵ $y = \sin x$，$y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$，绕 y 轴

5、计算曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上相应于 $x = 0$ 到 $x = \frac{1}{2}$ 一段弧的长。

§5-5 广义积分

前面所讨论的积分，其积分区间是有限的，并且被积函数在积分区间上是有界函数，这种积分叫常义积分。在一些实际问题中，还常遇到积分区间为无穷区间，因此，需要对积分进行推广，从而形成“广义积分”的概念。

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，若极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的**广义积分**，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**；如果上述极限不存在，函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 就没有意义。习惯上称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **发散**，这时记号 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不再表示数值。

类似可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上的广义积分为

定义 2 $$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分定义为

定义 3 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

其中 a 为实数。

当右边两个广义积分同时收敛时，称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**，否则称为**发散**。

按广义积分的定义，它是一类常义积分的极限，因此，广义积分的计算就是先计算常义积分在取极限。

例 1 计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$.

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

仿照牛顿—莱布尼兹公式的形式，假设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在积分区间上的一个原函数，若记

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}F(x)，\quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则以上广义积分可用与牛顿—莱布尼兹公式类似的形式表示为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^b$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

需要注意的是，积分限 $+\infty,-\infty$ 代入 $F(x)$ 时，应理解为对 $F(x)$ 求极限，根据这一表达

形式，例 1 的解法可表示为

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

例 2 计算$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$

所以广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$发散。

利用极限的性质，可以把定积分的分部积分法推广到广义积分。

例 3 计算$\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

解 $\int_{-\infty}^0 xe^x dx=\int_{-\infty}^0 xd(e^x)=xe^x\Big|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 e^x dx=xe^x\Big|_{-\infty}^0-e^x\Big|_{-\infty}^0$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x-1+e^x)=-1$

注意式中极限$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$是不定式，可用洛必达法则计算，请大家思考。

习题 5-5

判断下列各广义积分的敛散性，如果收敛，算出它们的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$　　(4) $\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-pt}dt\quad(p>k)$

(5) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$　　(6) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin wtdt\quad(p>0,w>0)$

(7) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　　(8) $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$