第四章　不定积分

我们已经知道，微分法的基本问题是研究如何从已知的函数求出它的导函数，那么与之相反的问题是：求一个未知函数，使其导函数恰好是某一已知的函数。这种逆问题不仅是数学问题本身的需要，而且它还出现在许多实际问题之中。例如：已知速度$V(t)$，求路程$S(t)$；已知曲线上某一点处的切线斜率，求曲线方程等等。这些内容与后续章节构成一元函数微积分学的另一重要部分——积分学。

§4-1 不定积分的概念

一、原函数

如果某物体的运动规律由方程$S=f(t)$给出，其中t是时间，S是物体走过的路程，则对函数$f(t)$求导数就得到这个物体在t时刻的瞬时速度$V=f'(t)$。但在力学里我们也常遇到相反的问题，即已知物体在任一时刻t的速度$V=V(t)$，而要找这个物体的运动规律，也就是说要去找它所走过的路程S与时间t的依赖关系$S=f(t)$。在数学上就是找一个函数$S=f(t)$使其导数$f'(t)$等于已知函数$V(t)$，这正好是导数运算的逆运算，即已知函数的导数，找原来的函数，这就是本章讨论的中心问题。

定义 1　设$f(x)$是定义在区间I上的函数，如果存在函数$F(x)$，使$F'(x)=f(x), x\in I$，或$dF(x)=f(x)dx$，则称$F(x)$是函数$f(x)$的一个**原函数**。

例如$F(x)=\sin x$是$f(x)=\cos x$的原函数，因为$(\sin x)'=\cos x$或$d\sin x=\cos xdx$。

由原函数概念可知，如果函数$f(x)$有一个原函数$F(x)$，则有$F^{'}(x)=f(x)$，那么$f(x)$的原函数$F(x)$是不是唯一的？如果不唯一，又有多少个？我们先来看下面的例子。因为

$$(x^2)'=2x$$

$$(x^2+1)'=2x$$

$$(x^2-1)'=2x$$

……

$$(x^2+c)'=2x \quad (c\text{为任意常数})$$

所以$x^2, x^2+1, x^2-1, \cdots$，$x^2+c$都是函数$2x$的原函数，由此可知，函数$2x$的原函数有无穷多个。

一般地，有如下定理：

定理 1 如果函数$f(x)$在区间I上有一个原函数$F(x)$，那么，对于任意常数c，函数$F(x)+c$也是$f(x)$在区间I上的原函数。

这表明函数$f(x)$如果有原函数，则它的原函数必然有无穷多个，因为原函数$F(x)+c$中的任意常数c可取无穷多个值。我们看如下定理。

定理 2 设函数$F(x)$是函数$f(x)$在区间I上的一个原函数，则

（1）$F(x)+c$也是函数$f(x)$的一个原函数，c为任意常数；

（2）$f(x)$的任意两个原函数之间只可能相差一个常数。

这个定理表明，如果函数有一个原函数存在，则必有无穷多个原函数，且它们彼此间只相差一个常数。若把相差一个常数的两个函数看作是“等价”的，则可以认为原函数“基本上”只有一个。于是定理 2 揭示了全体原函数的结构，即只需求出任意一个原函数，由它分别加上各个不同的常数，便可得到全部原函数。

为了方便计算，我们引入不定积分的概念和记号。

二、不定积分

定义 2 函数$f(x)$在区间I上的全体原函数称为$f(x)$在I上的**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx \tag{4-1-1}$$

其中$\int$称为**积分号**，$f(x)$为**被积函数**，$f(x)dx$为**被积表达式**，x为**积分变量**。尽管（4-1-1）式中各个部分都有其独立的名称和含义，但在使用时必须把它们看作一个整体。

由定义 2 可见，不定积分与原函数是总体与个体的关系，即若$F(x)$为$f(x)$在区间I上的一个原函数，则$f(x)$在I上的不定积分是一个函数族$\{F(x)+c\}$，其中c为任意常量函数。为书写方便起见，通常把它写作

$$\int f(x)dx = F(x)+c \tag{4-1-2}$$

这时c又称积分常数，它可取一切实数值. 于是又有

$$\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x)+c\right]' = f(x) \tag{4-1-3}$$

按照写法（4-1-2），本节开始时所举的例子可写成

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

我们把求不定积分的运算称作积分运算。由上述定义可知，积分运算与求导运算互为

逆运算。

下面讨论不定积分的几何意义。

由前例知 $\int 2xdx = x^2 + c$，

即函数 $2x$ 的不定积分（原函数族）是无穷多条曲线： $y = x^2 + c$

我们把这个曲线的集合，叫做 $2x$ 的积分曲线族（见图 4-1）。进一步观察可知，该曲线族中任何一条曲线均可由曲线 $y = x^2$ 沿 y 轴方向平移得到。

一般地，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的不定积分

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

是 $f(x)$ 的原函数族，在直角坐标系下它由无数条曲线组成，我们把它称为 $f(x)$ 的积分曲线族（见图 4-2）。它可由曲线 $y = F(x)$ 沿 y 轴平移形成。对 c 每取一个值 c_0，确定 $f(x)$ 的一个原函数 $y = F(x) + c_0$，曲线 $y = F(x) + c_0$ 叫做 $f(x)$ 的一条积分曲线； $f(x)$ 的任意两条积分曲线上，相对于同一横坐标 x 的纵坐标总差一个常数；对于同一横坐标 x，积分曲线族中每一条曲线上对应点的切线总互相平行。

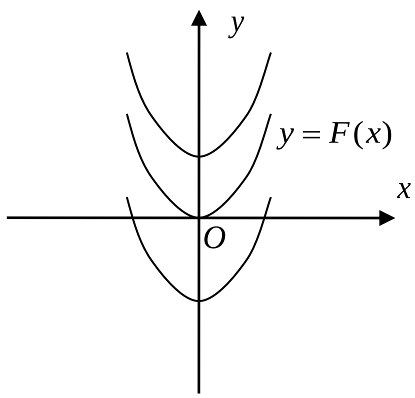

图 4-1

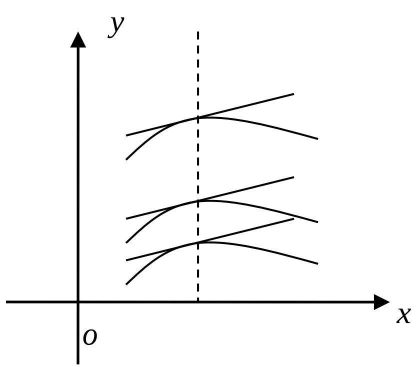

图 4-2

三、基本积分公式

由原函数的定义，很自然地我们可以从导数公式得到相应的积分公式。

例如，因为 $(x^2)' = 2x \Rightarrow \int 2xdx = x^2 + c$

类似地可以得到其它积分公式。下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，通常称为基本积分表。

⑴ $\int 0dx = c$

⑵ $\int x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + c$ （$\alpha \neq -1$）

⑶ $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$

⑷ $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$

⑸ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$

⑹ $\int \sin x dx = -\cos x + c$

⑺ $\int \cos x dx = \sin x + c$

⑻ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

⑼ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

⑽ $\int \tan x \sec x dx = \sec x + c$

⑾ $\int \cot x \csc x dx = -\csc x + c$

⑿ $\int e^x dx = e^x + c$

⒀ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$

以上所列的基本积分公式，是求不定积分的基础，必须熟记。在应用这些公式时，有时需要对被积函数作适当变形，请看下面两个例子。

例 1 求 $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x}}dx$

解 把被积函数化成 x^{α} 的形式，应用公式⑵，便得

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{4}{3}}dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1}x^{-\frac{4}{3}+1} + c = -3x^{-\frac{1}{3}} + c$$

例 2 求 $\int 2^x e^x dx.$

解 因为 $2^x e^x = (2e)^x$, 把 $2e$ 看作 a，应用公式⒀，得

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{1}{\ln(2e)}(2e)^x + c = \frac{1}{1+\ln 2}2^x e^x + c$$

习题 4-1

1、试求下列函数 $f(x)$ 的一个原函数：

⑴ $f(x)=x^{-1}$　　　　⑵ $f(x)=\sqrt[3]{x}$

⑶ $f(x)=10^{x}$　　　　⑷ $f(x)=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$

2、验证性质：

⑴ $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$

⑵ $\int dF(x)=F(x)+c$

3、用求导法验证下列各式成立：

⑴ $\int(3x^{2}+2x+1)dx=x^{3}+x^{2}+x+c$

⑵ $\int\sin(3x+1)dx=-\dfrac{1}{3}\cos(3x+1)+c$

⑶ $\int\dfrac{dx}{a^{2}-x^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+c$

⑷ $\int\ln xdx=x(\ln x-1)+c$

§4-2 不定积分的性质与直接积分法

从上节知，遇到积分表中的函数的积分可以直接套用基本积分公式，可是遇到函数的代数和或与数相乘作为被积函数时怎么办呢？我们回顾微分法中的线性运算性质，很自然地推想积分运算也有类似的性质，下面介绍积分运算的线性性质。

一、定积分的线性运算法则

定理 4.3 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上的原函数都存在，则 $f(x)\pm g(x)$ 在区间 I 上的原函数也存在，且

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

证 由导数线性运算法则和上节（4-1-3）可知

$$\left[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right]'=(\int f(x)dx)'\pm(\int g(x)dx)'=f(x)\pm g(x)$$

这说明 $\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ 是 $f(x)\pm g(x)$ 的不定积分，从而（4-2-1）式成立。

定理 4.4 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数存在，k 为实数（$k\neq 0$），则函数 $kf(x)$ 在区间 I 上的原函数也存在，且

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

证明留给读者自行做出。

在实际运算中，经常需要把定理 4.3 与定理 4.4 结合起来，即有

$$\int[k_1f(x)\pm k_2g(x)dx=k_1\int f(x)dx\pm k_2\int g(x)dx \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

例 1 求$\int(e^x-3\cos x)dx$

解 $\int(e^x-3\cos x)dx=\int e^x dx-3\int\cos x dx$

$$=e^x-3\sin x+c$$

注意 1 分项积分后，只要总的写出一个任意常数c即可。

注意 2 检验积分结果是否正确，只要把结果求导，看它的导数是否等于被积函数。如就例 1 的结果看来，由于$(e^x-3\sin x+c)'=e^x-3\cos x$，所以结果是正确的。

二、直接积分法

在求不定积分时，有很多被积函数可以直接套用基本积分公式或先用积分运算的线性法则，然后套用基本积分公式；还有一些被积函数须先经过适当的恒等变形（包括代数或三角的恒等变换），然后再用上述方法积分。我们把以上两类积分方法称为**直接积分法**。

请看以下几例

例 2 求$\int\frac{2x^3-x^2+3x-1}{x^2}dx$

解 先将分式分项，然后积分

$$\int\frac{2x^3-x^2+3x-1}{x^2}dx=\int(2x-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})dx$$

$$=2\int xdx-\int dx+3\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-2}dx$$

$$=x^2-x+3\ln x+\frac{1}{x}+c$$

例 3 求$\int(1-\sqrt{x})(\frac{1}{\sqrt{x}}+x)dx$

解 可将被积函数展开再积分

$$\int(1-\sqrt{x})(\frac{1}{\sqrt{x}}+x)dx=\int(\frac{1}{\sqrt{x}}-1+x-x\sqrt{x})dx$$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int dx+\int xdx-\int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$$

例 4 求$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$

解 通过简单变形，将分式分项再积分

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx \ = \int (x^2-1)dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c$$

例 5 求 $\int \tan^2 x dx$

解 用同角三角关系进行变形再积分

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + c$$

例 6 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + c$

下面我们讨论一下不定积分与微分的关系，按不定积分的定义，即可有下述关系：

由于 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad 或 \quad d\left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx \tag{4-2-4}$$

又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + c \quad 或 \quad \int dF(x) = F(x) + c \tag{4-2-5}$$

由（4-2-4）（4-2-5）两式可见，除可能相差一个常数外，微分运算（以记号 d 表示）与求不定积分的运算（以记号 $\int$ 表示）是互逆的，当记号 $\int$ 与 d 连在一起时，或者抵消，或者抵消后差一个常数。可简单地记述为：“**先积后微，形式不变；先微后积，差个常数**”。

习题 4-2

求下列不定积分：

(1) $\int (x^2 - 3x + 2)dx$ (2) $\int (1 - x + x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx$

(3) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ (4) $\int \sqrt[m]{x^n} dx$

(5) $\int (\sqrt{x}+1)(x-1)dx$ (6) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$

(7) $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)}dx$ (8) $\int \cot^2 x dx$

(9) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$　　　　　　(10) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$

§4-3 换元积分法

利用基本公式和积分性质可求得一些函数的原函数，但只是这样不能解决问题，如 $\int\sin 2xdx$ 时就不能直接使用积分公式求出。因此还需要进一步研究求不定积分的方法。下面先介绍不定积分的换元法。换元法的基本思想是把要计算的积分通过变量代换，化成基本积分公式中的某一种，算出原函数后，再换回原来的变量。

一、第一类换元法

例如在求 $\int\sin 2xdx$ 时，如由公式

$$\int\sin xdx=-\cos x+c$$

立即得　$\int\sin 2xdx=-\cos 2x+c$

则是错误的，因为

$$(-\cos 2x+c)'=2\sin 2x\neq\sin 2x$$

要解决此类问题，需用下面介绍的方法。

以上面的不定积分为例，

因为　$(-\cos u)'=\sin u$

从而　$\int\sin udu=-\cos u+c$

设 $u=2x,$ 有

$$\int\sin 2xd(2x)=-\cos 2x+c$$

从而　$\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\sin 2xd(2x)$

$$\underline{\underline{令2x=u}}\ \frac{1}{2}\int\sin udu=-\frac{1}{2}\cos u+c_1$$

$$\underline{\underline{回代u=2x}}\ -\frac{1}{2}\cos 2x+c_1\qquad（c_1=\frac{1}{2}c）$$

一般地，当被积表达式能表示为如下形式：

$$f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

则令 $\varphi(x)=u$，当 $\int f(u)du=F(u)+c$ 容易求得时，可按下述方法计算不定积分：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

$$\underline{\underline{令\varphi(x)=u}}\int f(u)du=F(u)+c$$

$$\underline{\underline{\text{回代}u=\varphi(x)}}\ F\left[\varphi(x)\right]+c$$

通常把这种积分方法称为**第一类换元积分法**，因为关键是把被积式凑成 $f\left[\varphi(x)\right]d\varphi(x)$，所以常常把它叫**凑微分法**。

例 1 求 $\int\frac{1}{x+2}dx$

解 $\int\frac{1}{x+2}dx=\int\frac{1}{x+2}d(x+2)\ \underline{\underline{x+2=u}}\ \int\frac{1}{u}du=\ln\left|u\right|+c\ \underline{\underline{u=x+2}}\ \ln\left|x+2\right|+c$

例 2 求 $\int(\frac{x-3}{50})^{99}dx$

解 $\int(\frac{x-3}{50})^{99}dx=50\int(\frac{x-3}{50})^{99}d(\frac{x-3}{50})\ \underline{\underline{\frac{x-3}{50}=u}}\ \ 50\int u^{99}du$

$$=50\times\frac{1}{100}u^{100}+c\ \underline{\underline{u=\frac{x-3}{50}}}\ \ \frac{1}{2}(\frac{x-3}{50})^{100}+c$$

例 3 求 $\int 2xe^{x^2}dx$

解 $\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}dx^2\ \underline{\underline{x^2=u}}\ \int e^u du=e^u+c\ \underline{\underline{u=x^2}}\ e^{x^2}+c$

当熟练后，所选新变量 $u=\varphi(x)$ 只需记在心里，可以不写出来，请看下面几个例子。

例 4 求 $\int\tan xdx$

解 $\int\tan xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+c$

例 5 求 $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

解 $\int x\sqrt{1-x^2}dx=\int(-\frac{1}{2})(-2x)\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(-x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

例 6 求 $\int\sin^2 xdx$

解 $\int\sin^2 xdx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}(\int dx-\int\cos 2xdx)$

$$=\frac{1}{2}\left[\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)\right]=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+c$$

例 7 求$\int \cos 2x \cos 3x dx$

解 利用三角学中的积化和差公式有

$$\int \cos 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + c$$

例 8 求$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a \succ 0)$

解 $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{1}{a} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + c$$

例 9 求$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

解 $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int (\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

二、第二类换元法

有些积分一开始就要作变量代换将积分化简。

例如，求$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$，由于积分号下出现了根号，给问题带来了麻烦。我们只要引入新变量，消去根号就能使积分简化。

令$x = t^2$则$dx = dt^2 = 2tdt$，于是

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{1+t} = \int (2 - \frac{2}{1+t}) dt = 2t - 2\ln|1+t| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$$

一般说来，当$\int f(x)dx$不易求出，引入新的变量t使$x = \varphi(t)$，（$\varphi(t)$单调可微，且$\varphi'(t) \neq 0$），把原积分化为容易计算的形式，即

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t)+c$$

$$\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)} F[\varphi^{-1}(x)]+c$$

这种积分法叫**第二类换元积分法**。

例 10 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

解 令 $x=t^6$（$t>0$），则 $dx=6t^5dt$，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int (1-\frac{1}{1+t^2})dt$$

$$= 6(t-\arctan t + c)$$

$$= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x} + c).$$

例 11 求 $\int \sqrt{1-x^2}dx$

解 令 $x=\sin u,\ -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}.$

于是 $\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos u d\sin u = \int \cos u\cdot\cos u du = \int \cos^2 u du$

$$= \frac{1}{2}\int(1+\cos 2u)du$$

$$= \frac{1}{2}(u+\frac{1}{2}\sin 2u)+c \qquad （1）$$

由 $x=\sin u,\ u=\arcsin x,$ 得

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2u = \sin u\cos u = x\sqrt{1-x^2}$$

代入（1）得 $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$

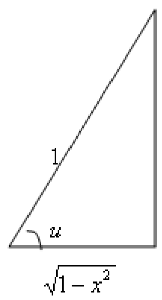

图 4-3

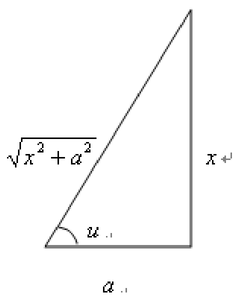

图 4-4

为了把$\cos u$换成x的函数，还可以利用图 4-3 中的直角三角形，由这直角三角形可以很方便地得到$\cos u=\sqrt{1-x^2}$。

例 12 求$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

解 令$x=a\tan u$，则$dx=a\sec^2 udu$（见图 4-4）

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec u.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{a\sec^2 u}{a\sec u}du=\int\sec udu$$

$$=\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|\sec u+\tan u\right|+c_1$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+c_1=\ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right|+c$$

例 10 与例 11 所用代换归纳如下：

$$\text{如被积函数中含有根式}\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2},\text{ 则令 } x=a\sin u\ (\text{或}x=a\cos u)\\ \sqrt{x^2+a^2},\text{则令}x=a\tan u(\text{或}x=a\cot u)\\ \sqrt{x^2-a^2},\text{则令}x=a\sec u(\text{或}x=a\csc u)\end{cases}$$

以后常用到前面例题中提到的若干积分，现将它补充到基本积分公式中去，以便查用。

(14) $\int\tan xdx=-\ln\left|\cos x\right|+c.$

(15) $\int\cot xdx=\ln\left|\sin x\right|+c.$

(16) $\int\sec xdx=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+c.$

(17) $\int\csc xdx=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+c.$

(18) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$, $(a>0).$

(19) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$, $\left|x\right|>\left|a\right|.$

(20) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c.$

(21) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c.$

习题　4-3

应用换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int \cos(3x+4)dx$　　　　(2) $\int e^{2x}dx$

(3) $\int \frac{dx}{2x+1}$　　　　(4) $\int (1+x)^n dx$

(5) $\int \sin 2x \sin 3x dx$　　　　(6) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(7) $\int \frac{dx}{x\ln x}$　　　　(8) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$　　　　(10) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad (a>0)$　　　　(12) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\quad (a>0)$

§4-4　分部积分法

前面我们在符合函数微分法的基础上，得到了换元积分法。现在利用两个函数乘积的微分法，来推导另一种求积分的基本方法——**分部积分法**。

设函数 $f(x),g(x)$ 都有连续的导函数，则由导数的积法则，有

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

从而有微分式

$$d\left[f(x)g(x)\right] = \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right]dx$$

即　$$d\left[f(x)g(x)\right] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

对上式两边进行不定积分得

$$f(x)g(x) = \int g(x)df(x) + \int f(x)dg(x)$$

即　$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

上式即为**分部积分公式**。使用分部积分公式可将形如 $\int f(x)dg(x)$ 的积分转化为 $\int g(x)df(x)$, 即把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的位置进行了对调，通过对调后一些积分变得易求了。

下面通过例题说明如何运用这个重要公式。

例 1　求 $\int x\cos x dx$

解　计算该积分难点在于如何去掉该积分中的 x .若将 $\cos x$“缩进”微分号中（凑微分），利用分部积分公式，转化后的新积分中对 x 进行一次微分，从而被积函数中消去了因子 x，不定积分很快被求出，具体过程如下：

$$\int x\cos xdx=\int xd\sin x=x\sin x-\int \sin xdx=x\sin x+\cos x+c$$

此题若将 x “缩进”微分号中则

$$\int x\cos xdx=\int \cos xd\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cos x-\int\frac{x^2}{2}d\cos x=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin xdx$$

上式右端积分便不容易求出。

由此可见，如果将“缩进”微分号中部分选取不当，就求不出结果，所以应用分部积分，恰当选取此部分很重要，应怎样选取“缩进”部分呢？一般说来需考虑下面两点：

（1）未“缩进”微分号中的部分求导后比“缩进”微分号中的部分求导后相对简单一些；

（2）$\int g(x)df(x)$ 要比 $\int f(x)dg(x)$ 容易积出来。

例 2 求 $\int xe^x dx$

解 $(x)'=1$，$(e^x)'=e^x$ 所以 $(x)'$ 比 $(e^x)'$ 相对简单些

所以 $$\int xe^x dx=\int xde^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c=(x-1)e^x+c$$

例 3 求 $\int x^2e^x dx$

解 因为 $(x^2)'=2x$，$(e^x)'=e^x$，所以将 e^x “缩进”微分号中

$$\int x^2e^x dx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^x dx^2=x^2e^x-2\int xe^x dx$$

再作一次分部积分

$$\int x^2e^x dx=x^2e^x-2xe^x+\int 2e^x dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$$

$$=(x^2-2x+2)e^x+c$$

例 4 求 $\int x\arctan xdx$

解 $$\int x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int \arctan xd(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2d(\arctan x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+c$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+c$$

例 5 求 $\int x\ln xdx$

解 $\int x\ln xdx=\int \ln xd(\frac{x^2}{2})=\frac{1}{2}\int \ln xd(x^2)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2 d\ln x$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$$

例 6 求 $\int \arccos xdx$

解 $\int \arccos xdx=x\arccos x-\int xd\arccos x$

$$=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$$

总结以上三个例题，如被积函数是幂函数和对数函数或反三角函数的乘积,就可以考虑用分部积分法，并选对数函数或反三角函数放在微分号外，将剩余部分“缩进”微分号中。

下面两例使用方法也比较典型。

例 7 求 $\int e^x\sin xdx$

解 $\int e^x\sin xdx=\int \sin xde^x=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int\cos xde^x$

$$=e^x\sin x-(e^x\cos x+\int e^x\sin xdx)$$

$$=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx$$

右端积分与原积分相同，把它移到左端与原积分合并，再两边同除以 2，便得

$$\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$$

例 8 $\int\sec^3 xdx$

解 $\int\sec^3 xdx=\int\sec x\sec^2 xdx=\int\sec xd\tan x$

$$=\sec x\tan x-\int\tan x\sec x\tan xdx$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx$$

$$=\sec x\tan x+\ln(\sec x+\tan x)-\int\sec^3 xdx$$

移项两边同除以 2 得

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + c$$

积分过程中，往往要兼用换元法与分部积分法。下面举两个两种方法都用的例子。

例 9 $\int x\cos^3 x dx$

解 $\int x\cos^3 x dx = \int x\cos^2 x d\sin x = \int x(1-\sin^2 x)d\sin x$

$$= \int xd(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x)$$

$$= x(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x) - \int (\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x)dx$$

$$= x(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x) + \int [1 - \frac{1}{3}(1-\cos^2 x)]d\cos x$$

$$= x(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x) + \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{9}\cos^3 x + c$$

例 10 求 $\int e^{\sqrt{x}}dx$

解 我们首先想到去掉根号，为此，令 $\sqrt{x} = t$， $x = t^2$ 有

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t \cdot 2tdt = 2\int te^t dt$$

这时，需要用分部积分法，利用例 2 的结果，并用 $t = \sqrt{x}$ 代回便得

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt = 2(t-1)e^t + c = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + c$$

习题 4-4

求下列不定积分：

(1) $\int x\sin x dx$	(2) $\int \ln x dx$
(3) $\int \arcsin x dx$	(4) $\int xe^{-x}dx$
(5) $\int x\ln(x-1)dx$	(6) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$
(7) $\int x^2 \arctan x dx$	(8) $\int x^2 \cos x dx$
(9) $\int (\ln x)^2 dx$	(10) $\int (x^2-1)\sin 2x dx$
(11) $\int e^{-x}\cos x dx$	(12) $\int x\cos^2 x dx$

§4-5 有理函数的积分

有理函数又称**有理分式**，是指由两个多项式的商所表示的函数，即具有下列形式的函数

$\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$，此类函数的积分可先将被积函数分解为一个多项式及一些部分分式之和以后再积分。

例如真分式 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}$ 可分解成 $\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$，

其中 A,B 为**待定系数**，可以用如下方法求出待定系数。

第一种方法，两端去分母，得

$$(x+3)=A(x-3)+B(x-2) \qquad ⑴$$

或 $x+3=(A+B)x-(3A+2B)$

根据同次幂系数必须相等，于是有

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=3 \end{cases}$$

从而解得 $A=-5, B=6$

第二种方法，在恒等式⑴中，代入特殊的 x 值，从而求出待定系数，在⑴式中，

令 $x=2$，得 $A=-5$

令 $x=3$，得 $B=6$

由于⑴式中的待定系数有且仅有一组解，因此这种方法所求得的数值必合要求，于是同样得到

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

又如真分式 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ 可分解成

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

再求待定系数 A,B,C . 去分母得

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+cx \qquad ⑵$$

令 $x=0$，得 $A=1$；令 $x=1$，得 $C=1$，比较⑵式两端 x^2 项的系数，有 $0=A+B$，由 $A=1$ 得 $B=-1$，于是

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

再如，真分式$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$可分解成

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+c}{1+x^2}$$

两端去分母，合并同类项，有

$$1=A(1+x^2)+(Bx+c)\cdot(1+2x)$$

$$=(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)$$

比较两端同次幂的系数，有

$$\begin{cases}A+2B=0\\B+2C=0\\A+C=1\end{cases}$$

解得 $A=\dfrac{4}{5}$，$B=-\dfrac{2}{5},C=\dfrac{1}{5}$

于是$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{4}{1+2x}+\dfrac{1-2x}{1+x^2})$

以上介绍的方法称为把真分式分解为部分分式的**待定系数法**。当我们把一个有理函数分解为一个多项式及一些部分分式之和以后，各部分分式的积分即可求出，且结果都是初等函数。此外，由代数学知道，从理论上说，实系数多项式$Q(x)$在实数范围内总可以分解成一次因式和二次质因式的乘积，从而有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$总可以分解成多项式与部分分式之和，因此有理函数的原函数都是初等函数。

例 1 求$\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$

解 因为$\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\dfrac{1}{x^3+1}$

所以 $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx=\int(x+\frac{1}{x^2+1})dx=\int xdx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}x^2+\arctan x+c$

例 2 求$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$

解 因为$\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$

用待定系数法 令$x=1$，得$A=-1$；令$x=2$，得$B=1$, 则

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1})dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + c = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

例 3 求 $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

解 因为

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

用待定系数法得 $A=1, B=-1, C=1$

所以 $$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int [\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}]dx = \ln x - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

$$= \ln\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} + c$$

例 4 求 $\int \frac{dx}{x^3+8}$

解 $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+4}{x^2-2x+4}$$

$$1 = A(x^2-2x+4) + (x+2)(Bx+c)$$

令 $x=-2, A=\frac{1}{12}$;

比较两边同次数幂的系数，有 $A+B=0$，得 $B=-\frac{1}{12}$

$4A+2C=1$，得 $C=\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{12(x+2)} - \frac{x-4}{12(x^2-2x+4)}$$

$$\int \frac{dx}{x^3+8} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{12}\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}dx$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\int \frac{d(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln|x^2-2x+4| + \frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln|x^2-2x+4| + \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + c$$

例 5 求 $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$

解 取 $\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

两端去分母得 $2x+2=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)$

令 $x=1$，得 $A=1$，代入上式比较同次数幂的系数，得

$$\begin{cases} 1+B=0 \\ C-B=0 \\ 2+D+B-C=0 \\ E+C-D-B=0 \\ 1-E-C=0 \end{cases}$$

解得 $B=-1, C=-1, D=-2, E=0$

$$\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx=\int \frac{dx}{x-1}-\int \frac{x+1}{x^2+1}dx-\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\int \frac{dx}{x^2+1}-\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan x+\frac{1}{x^2+1}+c$$

习题 4-5

求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{4-x^2}$;

(2) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$;

(3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

(4) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

(5) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

(6) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

(7) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

(8) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

(9) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

(10) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

(12) $\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}$.