

第三章 导数的应用

上一章我们研究了导数的概念和求导数的方法。本章先介绍求不定式极限的一个重要方法——罗必达法则，然后利用导数研究函数的单调性和极值。

§3-1 罗必达法则

在求两个无穷小量的比及两个无穷大量的比的极限时，由于不能使用商的极限的运算法则，因此在处理这类极限问题时常常感到比较困难，能否得到一种有效的方法来解决这类问题，罗必达法则就是解决这类问题的一种简单有效的方法。

习惯上，如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时，同时趋于零或无穷大，就把比 $\frac{f(x)}{g(x)}$

叫做当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。

下面给出求这类极限的方法。

一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 1 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

(2) 在点 x_0 的某一邻域内（点 x_0 可除外） $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x) \neq 0$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在（或为无穷大）}$$

则
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上述定理对 $x \rightarrow \infty$ 时也成立

此定理称为罗必达法则

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属 $\frac{0}{0}$ 型，而 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 满足相应的条件时，则可再次使用罗必达

法则，即
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots\dots$$

且可以此类推，直到导数极限之比不再是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式为止。

例 1 求
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x(1+x)} = \infty$$

$$\text{例 2 } \text{求 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x - \frac{\pi}{3})}{2\sin x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{例 3 } \text{求 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}$$

二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷大量, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

(2) 在点 x_0 的某一邻域内 (点 x_0 可除外) $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在, 且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大)

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上述定理对 $x \rightarrow \infty$ 时也成立

此定理也称为罗必达法则

$$\text{例 4 } \text{求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$$

$$\text{例 5 } \text{求 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \cot x}{\ln x}$$

解

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \cot x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\cot x} (-\csc^2 x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x}{\sin x \cos x} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sin x} = -1$$

此定理也可重复使用

例6 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

三、其它类型未定式的极限

除上面讨论的 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式外, 还有 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 型的未定式,

这些类型的未定式, 可通过适当变形, 先化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 再用罗必达法则计算。

例7 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

例8 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}$$

例9 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}$$

$$\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cdot \cot x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \tan x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \tan x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

习题 3-1

1、用罗必达法则求下列函数的极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

2、验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，但不能用罗必达法则得出。

3、验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}$ 存在，但不能用罗必达法则得出

§3-2 函数的单调性

在高中我们已经介绍过函数单调性的概念，现在利用导数来研究函数的单调性。

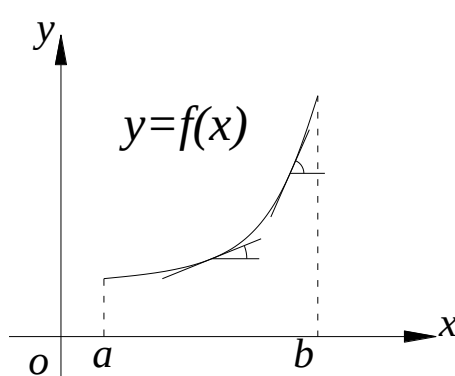


图 3-1

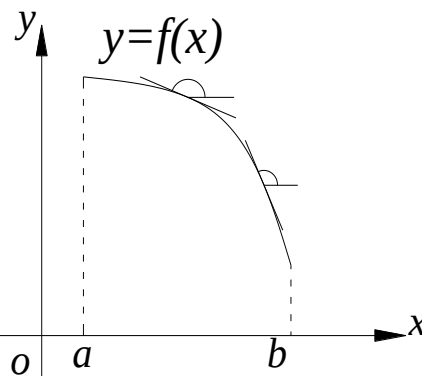


图 3-2

由图 3-1 可看出，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调增加，那么它的图像是一条沿 x 轴正向上升的曲线，这时曲线上各点切线的倾斜角都是锐角，因此它们的斜率 $f'(x) > 0$ 。同样，由图 3-2 可看出，如果函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少，那么它的图像是一条沿 x 轴正向下落的曲线，这时曲线的各点切线的倾斜角都是钝角，它们的斜率 $f'(x) < 0$ 。

从上面的直观分析可看出，利用导数的符号可以判断函数的单调性。因此有下面的定理

定理 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导

(1) 若在 (a, b) 内, $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加,

(2) 若在 (a, b) 内, $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少。

证明从略

例 1 判断函数 $f(x) = e^x - x - 1$ 的单调性

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ $f'(x) = e^x - 1$

当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$ 因而 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加

当 $x < 0$ 时, $0 < e^x < 1$ 因而 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少

当 $x = 0$ 时, $e^x = 1$ 因而 $f'(x) = 0$

例 2 求函数 $f(x) = e^x - x - 1$ 的单调区间

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 求导数得

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = 2$

这两个根把 $(-\infty, +\infty)$ 分为三个区间: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ 各区间的导数符号和

函数的单调性如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

表中“↗”表示单调增加, 表中“↘”表示单调减少。

需要注意的是, 使导数不存在的点也可能是函数单调区间的分界点。如函数 $y = \sqrt{x^2}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 它的导数 $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ 在点 $x = 0$ 处不存在, 但在 $(-\infty, 0)$ 区间内, $y' < 0$, $f(x)$ 单调减少, 在区间 $(0, +\infty)$ 内, $y' > 0$, $f(x)$ 单调增加。因此是 $x = 0$ 函数 $y = \sqrt{x^2}$ 单调区间的分界点。(图 3-3)

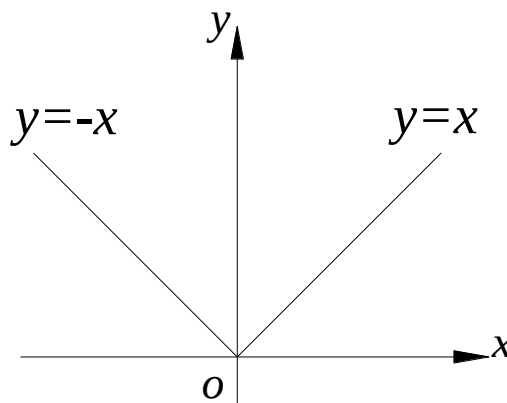


图 3-3

习题 3-2

求下列函数的单调区间：

1、 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

2、 $f(x) = (x-1)(x+1)^3$

3、 $f(x) = x^2 e^{-x}$

4、 $f(x) = 2x^2 - \ln x$

§3-3 函数的极值

一、函数的极值

1、极值的定义

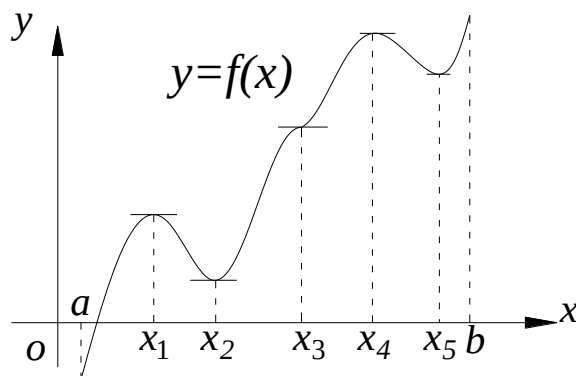


图 3-4

观察图 3-4 中的曲线可知，函数 $y = f(x)$ 在点 x_1, x_4 处的函数值比它近旁的函数值大，在点 x_2, x_5 处的函数值比它近旁的函数值小。

一般地，设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若对该邻域内非 x_0 的 x ，总有 $f(x) < f(x_0)$ （或 $f(x) > f(x_0)$ ）成立，则称 $f(x_0)$ 为函数 $y = f(x)$ 的极大值（或极小值），称点 x_0 为函数 $y = f(x)$ 的极大值点（或极小值点），简称极大点（极小点）。

极大值和极小值统称极值，极大值点和极小值点统称极值点。

图 3-4 中， $f(x_1), f(x_4)$ 为函数 $y = f(x)$ 的极大值， x_1, x_4 为函数 $y = f(x)$ 的极大点； $f(x_2), f(x_5)$ 为函数 $y = f(x)$ 的极小值， x_2, x_5 为函数 $y = f(x)$ 的极小点。

由极值定义可看出，函数的极值只是局部性的概念，它只能在区间的内部取得，而且

数的最值它是就整体而言，函数值最大或最小，它可在区间内部取得，也可在区间的端点处取得。

2、函数极值的判定和求法

由图 3-4 可知，极值点的一阶导数 $f'(x_0) = 0$ ，因此有下面定理

定理（极值存在的必要条件）

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导，且在点 x_0 处取得极值，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数

$$f'(x_0) = 0$$

使导数为零的点（即方程 $f'(x) = 0$ 的实根）叫做**驻点**。

上述定理告诉我们，极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点，那么，如何判断哪些点是极值点呢？

由图 3-4 进一步可看出，极值点左右两侧的导数符号互异，因此又有下述定理。

定理（极值存在的充分条件）

设函数在 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域内可导，

①如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$ ，右侧 $f'(x) < 0$ ，那么 $f(x_0)$ 是函数的极大值。

②如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$ ，右侧 $f'(x) > 0$ ，那么 $f(x_0)$ 是函数的极大值。

综上，可以得出求可导函数的极值的步骤如下：

（1）确定函数的定义域，求 $f'(x)$ ；

（2）求出 $f(x)$ 的全部驻点及不可导点；

（3）考察 $f'(x)$ 符号在每个驻点或不可导点的左、右近旁的符号，从而确定是否为极值点；

（4）求出各极值点的函数值。

例 1 求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$ 的极值

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 2$

用驻点 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 2$ 分割定义域，列表判断如下：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	极大值 $28/3$	↘	极小值 $-4/3$	↗

二、函数的最大值与最小值

由闭区间上连续函数的最大值与最小值性质可知,在闭区间上连续的函数一定存在有最大值与最小值,此时,如果函数取得最值的点在 $[a, b]$ 内部,那么这个最值一定是函数的极值,所以求 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值或最小值方法是:求出所有驻点的函数值,并把它与端点的函数值比较,其中最大的便是函数的最大值,最小的便是函数的最小值。

在实际问题中,如果函数 $f(x)$ 在某区间内只有一个驻点 x_0 ,而且从实际问题本身又可以知道 $f(x)$ 在该区间必定有最大值或最小值,那么 $f(x_0)$ 就是要求的最大值或最小值。

例 2 求函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在 $[-1, 3]$ 上的最大值与最小值

解 (1) $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, 它们的函数值为

$$f(-2) = -14, f(0) = 2, f(2) = -14$$

(2) 区间端点处的函数值为 $f(-1) = -5$ $f(3) = 11$

(3) 比较以上各函数值, 可知在 $[-1, 3]$ 上, 函数的最大值为 $f(3) = 11$,

最小值为 $f(-2) = f(2) = -14$

例 3 用三块等宽的长方形木板, 做成一个断面为梯形的水槽(图 3-5), 问倾斜角 ϕ 为多大时, 水槽的截面积最大?

解 设木板的宽为 a , 水槽的高为 h , 截面积为 S , 则

$$S = \frac{1}{2}(a + a + 2a \cos \phi) \cdot h = \frac{1}{2}(2a + 2a \cos \phi) \cdot a \sin \phi$$

即

$$S = a^2(1 + \cos \phi) \sin \phi \quad (0 < \phi < \frac{\pi}{2})$$

现在求 ϕ 在区间 $(0 < \phi < \frac{\pi}{2})$ 内取何值时,

函数 S 的值最大。

求导数

$$S' = a^2[-\sin^2 \phi + (1 + \cos \phi) \cos \phi]$$

$$= a^2[-(1 - \cos^2 \phi) + \cos \phi + \cos^2 \phi]$$

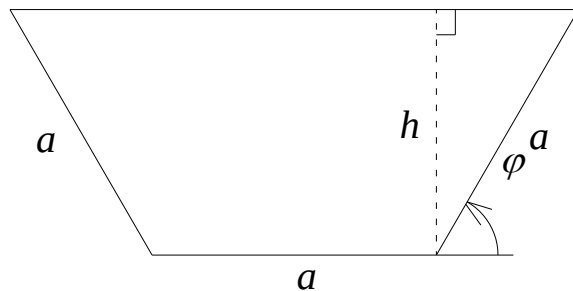


图 3-5

$$= a^2(2\cos^2\phi + \cos\phi - 1) = a^2(2\cos\phi - 1)(\cos\phi + 1)$$

$$\text{令 } S' = 0, \text{ 得 } \cos\phi = \frac{1}{2}, \cos\phi = -1$$

$$\text{所以 } \phi = \frac{\pi}{3}, \phi = \pi$$

由于在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内函数 S 只有一个驻点 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 。所以当 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 时, 水槽的截面积最大, 最大面积为

$$S = a^2(1 + \cos\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

习题 3-3

1、求下列函数的极值:

$$(1) f(x) = x - \ln(1+x)$$

$$(2) f(x) = \sin x + \cos x \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$(3) f(x) = 2x^2 - x^4$$

2、求下列函数的最值:

$$(1) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5 \quad x \in [-2, 2]$$

$$(2) f(x) = \sin 2x - x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(3) f(x) = -x^2 + 4x - 3$$