第二章 导数与微分

导数、微分以及它们的应用统称微分学，它是微积分学的两个重要组成部分之一。本章的主要内容是导数的概念和求法。它们是微积分学中最重要的基本概念和基本运算。

§2-1 导数的概念

导数是从大量实际问题中抽象出来的概念，它是反映函数相对于自变量变化的快慢程度。本节主要把高中学过的导数定义，几何意义作一简略复习。

一、导数的定义

定义　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义。当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数值有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，如果当 $\Delta x \to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，那么称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数。记作 $f'(x_0)$

也可记作　$y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处导数存在，简称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导。

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的每一点都可导，即对于区间 (a, b) 内的每一个值 x，

极限　$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

都存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导，这时，对于区间 (a, b) 内的每一个 x 的值，都对应着一个导数值，这就构成了一个新的函数， 这个函数叫做原来函数 $y = f(x)$ 的导函数。记作　y'，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$

即　$\displaystyle f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

显然 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 的函数值，即

$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$$

以后为了方便起见，把导函数简称导数。

关于导数的定义，有以下说明

1、 函数的改变量与自变量的改变量之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，反映的是自变量$x$从$x_0$改变到$x_0+\Delta x$时，函数$f(x)$的平均变化率；而导数$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$则是函数在点$x_0$的变化率，反映了函数随自变量的变化而变化的快慢程度。

2、 如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$不存在，就说函数$f(x)$在$x_0$处不可导（或导数不存在）；如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty$为了方便起见，也说函数$f(x)$在点$x_0$处的导数为无穷大。

函数$f(x)$在点x_0处的导数的几何意义是：曲线$y=f(x)$在点x_0处的切线的斜率。

二、求导举例

由导数的定义可知，求函数$y=f(x)$的导数可分为以下三个步骤：

（1）求增量　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

（2）算比值　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

（3）取极限　$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

例 1 求函数$y=x^2$的导数$f'(x)$，$f'(1)$

解 （1）求增量　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$

（2）算比值　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

（3）取极限　$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$

即　$(x^2)'=2x$

$f'(1)=2x\big|_{x=1}=2$

例 2 求函数$y=\sin x$的导数

解 （1）求增量　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$$=\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$$

（2）算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$

（3）取极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$

$$=\lim_{\Delta x\to o}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos x$$

即 $(\sin x)'=\cos x$

类似地可得到 $(\cos x)'=-\sin x$

例 3 求函数 $y=\log_a x$（$a>0$ ，$a\neq 1$）的导数

解 $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\log_a[\lim_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}]=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

即 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

当 $a=e$ 时，有 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

例 4 曲线 $y=x^2$ 在点 $\left(2\ ,\ 4\right)$ 处的切线斜率，并写出切线方程和法线方程。

解 由例 1 知 $y'=(x^2)'=2x$

根据导数的几何意义,所求切线的斜率为

$$k_1=y'\big|_{x=2}=2x\big|_{x=2}=4$$

从而所求切线方程为 $y-4=4(x-2)$

即　　$4x-y-4=0$

因为法线的斜率　　$k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\dfrac{1}{4}$

所以法线方程为　　$y-4=-\dfrac{1}{4}(x-2)$

即　　$x+4y-18=0$

三、可导与连续的关系

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，即极限　　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
存在，则根据具有极限的函数与无穷小的关系知道，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha \qquad （\alpha\text{ 为当 }\Delta x\to 0\text{ 时的无穷小}）$$

两端同乘以 Δx，得　$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$

由此可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，这就是说，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是连续的，因此，我们有下面的结论：如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y=f(x)$ 在该点处一定连续。

但是，上述结论如果倒过来叙述，就不一定成立，即函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，它在该点处一定可导。

例如，函数 $y=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x\ , & x\geq 0\\ -x\ , & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，但在该点处不可导。这是因为

在点 $x=0$ 处有　　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{(0+\Delta x)^2}-\sqrt{0^2}}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$

左极限　　$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$

右极限　　$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$

因为左、右极限不相等，故极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，即函数 $y=\sqrt{x^2}$ 在点 $x=0$ 处不可导，这种情况表示曲线 $y=\sqrt{x^2}$ 在 $x=0$ 处无切线。

由上面讨论可知，函数连续是函数可导的必要条件。但不是充分条件，所以如果函数在某点不连续，则函数在该点一定不可导。

习题 2-1

1、 填空：

假设 $f'(x_0)$ 存在，则

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$________　　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=$______　　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$______

2、物体作直线运动的方程为 $s=3t^2-5t$ ，求：

（1）　物体在 2 秒到 $(2+\Delta t)$ 秒的平均速度；

（2）　物体在 2 秒时的速度。

3、设 $y=ax+b$（ a , b 都是常数），根据定义求 y'

4、求双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在其横坐标等于 1 处的切线方程和法线方程。

§2-2 导数的运算法则

我们可以根据导数的定义，求出一些简单函数的导数，对于较为复杂的函数，要用定义求出它们的导数是比较困难的。本节我们继续复习高中所学的求导的基本法则和基本公式。

一、函数的和、差、积，商的求导法则。

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ ，并且它们都是可导的。

法则 1 两个可导函数之和（或差）的导数，等于这两个函数的导数的和（或差）即

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

法则 2 两个可导函数乘积的导数，等于第一个因子的导数乘以第二因子，再加第一个因子乘以第二因子的导数，即　$(uv)'=u'v+uv'$

法则 3 两个可导函数商的导数，等于分母乘以分子的导数减去分子乘分母的导数，再除以分母的平方，即　$(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

证明从略。

需要说明的是：

（1）法则 1 和法则 2 可以推广到有限个可导函数的情形，例如

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$

$$(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$$

（2）法则 2 中，如果其中一个为常数时，如 $v=c$（ c 为常数）

则有 $(c\cdot u)'=c\cdot u'$

即在求一个常数与可导函数之积的导数时，常数可以提到求导符号的外面

（3）法则 3 中，如果 $u=c$（c 为常数）则有

$$(\frac{c}{v})'=-\frac{c\cdot v'}{v^2}$$

特别地，当 $u=1$ 时，有 $(\frac{1}{v})'=-\frac{v'}{v^2}$

例 1 求 $y=3x^2-4x+2\sqrt{x}-5$ 的导数

解 $y'=(3x^2)'-(4x)'+(2\sqrt{x})'-(5)'=3(x^2)'-4(x)'+2(\sqrt{x})'-0$

$=3\cdot 2x-4\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=6x+\frac{1}{\sqrt{x}}-4$

例 2 求 $y=x\sin x(\ln x-1)$ 的导数

解 $y'=(x)'\sin x(\ln x-1)+x(\sin x)'(\ln x-1)+x\sin x(\ln x-1)'$

$=\sin x(\ln x-1)+x\cos x(\ln x-1)+x\sin x\cdot\frac{1}{x}$

$=\sin x\ln x+x\cos x\ln x-x\cos x$

例 3 求正切函数 $y=\tan x$ 的导数

解 $y'=(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x$

类似地可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$

例 4 求正割函数 $y=\sec x$ 的导数

解 $y'=(\sec x)'=(\frac{1}{\cos x})'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x$

即 $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

类似地可得 $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

二、反函数的导数

定理　**设函数 $y = f(x)$ 是在区间 $(a\ ,\ b)$ 内的单调函数，并且在这个区间内有导数 $f'(x) \neq 0$，则反函数 $x = \varphi(y)$ 在对应区间 $(c\ ,\ d)$ 内也有导数，并且**

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{或} \qquad x_y{}' = \frac{1}{y_x{}'}$$

即**反函数的导数等于它的直接函数的导数的倒数。**

例 5　求反正弦函数 $y = \arcsin x\ (-1 < x < 1)$ 的导数

解　$y = \arcsin x\ (-1 < x < 1)$ 是 $x = \sin y\ \ (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ 的反函数，且 $x = \sin y$ 在 $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ 内单调可导，又　$x_y{}' = (\sin y)' = \cos y > 0$

根据上述定理可知，导数 $y_x{}'$ 也存在，并且有

$$y_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即　$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似地可得到　$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例 6　求反正切函数 $y = \arctan x\ (-\infty < x < +\infty)$ 的导数

解　$y = \arctan x\ (-\infty < x < +\infty)$ 是 $x = \tan y\ \ (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ 的反函数，且 $x = \tan y$ 在 $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ 内单调可导，又　$x_y{}' = (\tan y)' = \sec^2 y \neq 0$

根据上述定理可知，导数 $y_x{}'$ 也存在，并且有

$$y_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

即　$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

类似地可得到　$$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

例 7 求指数函数 $y = a^x\ (a > 0\ ,\ a \neq 1)$ 的导数

解 $y=a^x$ 是 $x=\log_a y\ (y>0)$ 的反函数，且 $x=\log_a y$ 在 $(0<y<+\infty)$ 内单调可导，

又 $x_y{}'=(\log_a y)'=\dfrac{1}{y\ln a}\neq 0$

根据上述定理可知，导数 $y_x{}'$ 也存在，并且有

$$y_x{}'=\frac{1}{x_y{}'}=y\ln a=a^x\ln a$$

即 $$(a^x)'=a^x\ln a$$

当 $a=e$ 时，有 $$(e^x)'=e^x$$

三、导数公式

为了查阅方便，我们将基本初等函数的导数公式汇总如下：

(1) $(c)'=0$ （c 为常数） (2) $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$

(3) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (4) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(5) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ (6) $(e^x)'=e^x$

(7) $(\sin x)'=\cos x$ (8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$ (10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(11) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$ (12) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ (16) $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

习题 2-2

1、 求下列函数的导数：

（!） $y=\dfrac{x^4+x^2+1}{\sqrt{x}}$ （2） $y=x^{10}+10^x$

（3） $y=\sqrt{x}e^x$ （4） $y=\ln x+2\arctan x+3$

（5）$S=\dfrac{\sin t}{\sin t+\cos t}$　　（6）$y=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

（7）$\rho=\theta\cos\theta+\sin\theta$　　（8）$y=2^{x}(x\sin+\cos x)$

（9）$y=(1+2x)^{2}$　　（10）$y=\dfrac{2-3x}{2+x}$

2、 求下列函数在给定点的导数：

（1） $f(x)=(1+x^{2})(3-\dfrac{1}{x^{3}})$，求 $f'(1)$ 和 $f'(-1)$

（2） $f(x)=e^{x}\cos x+2\tan x$，求 $f'(0)$

§2-3　复合函数的求导法则

一、复合函数的求导法则

设 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 也可导，现在来求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数。

由于函数 $y=f(u)$ 在点 u 处可导，因此

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}$$

存在，根据极限与无穷小的关系，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}+\alpha$$（其中 α 是当 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小）

两边同乘以 Δu，得　$\Delta y=\dfrac{dy}{du}\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u$

同边同除以 Δx，得　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

于是　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x})$

根据可导必连续的性质知道，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$,从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0$$

又因为 $u=\varphi(x)$ 在点 x 可导，因此　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\dfrac{du}{dx}$

所以　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{du}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

即　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

由此得复合函数的求导法则

法则　两个可导函数复合而成的函数的导数等于函数对中间变量的导数以中间变量对自变量的导数，即　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

上式也可写成 $y_x{}' = y_u{}' \cdot u_x{}'$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$

例 1 求 $y = \sin 2x$ 的导数

解 $y = \sin 2x$ 可看作由 $y = \sin u$ ，$u = 2x$ 复合而成，因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2 = 2\cos 2x$$

例 2 求 $y = (2x+3)^3$ 的导数

解 $y = (2x+3)^3$ 可看作由 $y = u^3$ ，$u = 2x+3$ 复合而成，因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 2 = 6(2x+3)^2$$

例 3 求 $y = \ln \sin x$ 的导数

解 $y = \ln \sin x$ 可看作由 $y = \ln u$ ，$u = \sin x$ 复合而成，因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形.。以两个中间变量为例,设 $y = f(u)$ ，$u = \varphi(v)$ ，$v = \psi(x)$,则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{或} \quad y_x{}' = y_u{}' \cdot u_v{}' \cdot v_x{}'$$

例 4 求 $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$ 的导数

解 $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$ 可看作由 $y = e^u$ ，$u = \arcsin v$ ，$v = \sqrt{x}$ 复合而成，因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^u \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\arcsin \sqrt{x}}}{2\sqrt{x-x^2}}$$

当复合函数求导比较熟练以后，中间变量可以不必写出，而采用下列例题的方法，即“由外往里，逐层求导”即可，所谓“由外往里”指的是从式子的最后一次运算程序开始往里复合；“逐层求导”指的是每次只对一个中间变量进行求导。

例 5 求 $y = \ln \cos(e^x)$ 的导数

解 $\dfrac{dy}{dx} = [\ln \cos(e^x)]' = \dfrac{1}{\cos(e^x)} \cdot [\cos(e^x)]' = \dfrac{-\sin(e^x)}{\cos(e^x)} \cdot (e^x)' = -e^x \tan(e^x)$

例 6 求 $y = \sin \dfrac{2x}{1+x^2}$ 的导数

解

$$y' = (\sin\frac{2x}{1+x^2})' = \cos\frac{2x}{1+x^2}\cdot(\frac{2x}{1+x^2})' = \cos\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{(2x)'\cdot(1+x^2) - 2x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}$$

例 7　求 $y = x^{\alpha}$（α 为任意常数，$x > 0$）的导数

解　$\because$　$y = x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{\alpha\cdot\ln x}$

$$\therefore\ y' = (x^{\alpha})' = (e^{\alpha\cdot\ln x})' = e^{\alpha\cdot\ln x}\cdot(\alpha\ln x') = x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

二、初等函数的求导

初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合构成的，可用一个解析式子表示的函数。为了解决初等函数的求导问题，在高中及前面两节中，我们已经推导了所有基本初等函数的求导数公式，还介绍了函数的和、差、积、商求导法则及复合函数、反函数的求导法则，这样就解决了初等函数的求导问题。由于这些公式和法则是微积分计算的基础，因此必须熟练掌握和运用。

例 9 求 $y = \sin nx\cdot\sin^n x$　（n 为常数）的导数

解　$y' = (\sin nx\cdot\sin^n x)' = (\sin nx)'\cdot\sin^n x + \sin nx\cdot(\sin^n x)'$

$$= \cos nx\cdot n\cdot\sin^n x + \sin nx\cdot n\sin^{n-1} x\cdot\cos x$$

$$= n\sin^{n-1} x(\cos nx\cdot\sin x + \sin nx\cdot\cos x)$$

$$= n\sin^{n-1} x\cdot\sin(n+1)x$$

习题 2-3

求下列函数的导数：

1、$y = (3x^2 + 1)^{10}$　　2、$y = \cos(5x + \frac{\pi}{4})$

3、$y = e^{x^3}$　　4、$y = \sqrt{1+e^x}$

5、$y = \ln\tan x$　　6、$y = \ln[\ln(\ln x)]$

7、$y = \cos^2(x^2 + 1)$　　8、$y = (\arcsin x)^2$

9、$y = \cos nx\cdot\sin^n x$　　10、$y = \ln\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

11、 $y=\ln x^2+(\ln x)^2$

12、 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

13、 $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

14、 $y=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos 3x$

15、 $y=\sec^2(e^{2x})$

16、 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

17、 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

18、 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

19、 $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

20、 $y=\dfrac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$

§2-4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的导数

我们知道，函数 y 可以用一个含自变量 x 的关系式 $y=f(x)$ 来表示，如 $y=x+2$，$y=x^3-2x+5$，$y=e^x\sin 2x$ 等。像这种形式的函数叫**显函数**。以前我们遇到的函数大都是显函数。

但是有时还会遇到用另一种表达形式的函数，就是函数 y 是由一个含 x 和 y 的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的。如 $x-y+3=0$，$x^2+y^2-1=0, xy=e^{x+y}$ 等。这种形式的函数叫**隐函数**。

有些隐函数很容易化为显函数，如由方程 $x-y+3=0$ 解出 y，就可得到显函数 $y=x+3$。而有些则很困难，甚至不可能表示为显函数形式，如方程 $xy=e^{x+y}$ 就无法把 y 表示成 x 的显函数，因此，我们需要研究直接由隐函数求出导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 的方法，下面通过例子来说明这种方法。

例 1　求由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的隐函数 y 对 x 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

解 将方程 $x^2+y^2=1$ 两边同时对 x 求导，并注意 y 到是 x 的函数，y^2 是 x 的复合函数。

$$(x^2+y^2)'_x=(1)'$$

$$2x+2y\cdot y_x'=0$$

解出 y_x'，得　$y_x'=-\dfrac{x}{y}$

应当注意，$y_x{}'$ 的表达式中允许含有 y，它是方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的隐函数。

通过上例我们总结出隐函数的求导方法是：

把方程 $F(x,y)=0$ 的两边同时对 x 求导，遇到 y 看作是 x 的函数，遇到 y 的函数看作是 x 的复合函数，得到一个含 y' 的方程，然后解出 y'，就是所求隐函数的导数。

例 2 求由方程 $y=\sin(x+y)$ 所确定的隐函数 y 对 x 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

解 方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

例 3 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数 y 在 $x=0$ 时的导数 $y'\big|_{x=0}$

解 方程两边同时对 x 求导，得

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0$$

$$y'=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

当 $x=0$ 时，由原方程得 $y=0$，所以 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$

例 4 求幂指函数 $y=x^x$ $(x>0)$ 的导数

解 该函数虽然是显函数的形式，但不能直接用初等函数的求导方法求导。采用两边取对数，再用隐函数求导法则就很容易求出该函数的导数。

两边取对数，得 $\ln y=x\cdot\ln x$

方程两边同时对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}$

$$y'=y(1+\ln x)$$

即
$$y'=x^x(1+\ln x)$$

上述求导方法称为**对数求导法**。

二、由参数方程所确定的函数的导数

我们知道，一般情况下参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

确定了一个 y 是 x 的函数。在实际问题中，有时需要计算由方程（1）所确定的函数 y 对 x 的导数，但从（1）式中消去参数 t 有时会很困难，因此我们要找一种直接由方程（1）来计算导数的方法。

设 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 有导数 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$，且 $\psi'(t) \neq 0$，则

$$x_t' = \varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad y_t' = \psi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

因为 $x = \varphi(t)$ 可导，则必连续，所以当 $\Delta t \to 0$ 时，$\Delta x \to 0$ 有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad$ 或 $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

这就是由参数方程所确定的函数 y 对 x 的导数公式。

例 5 已知椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 求椭圆在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程。

解 当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时，椭圆上相应点 M 的坐标为

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \qquad y_0 = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

$\because \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\cot t$

$\therefore$ 曲线在点 M 处的切线斜率为 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{b}{a}$

所以，椭圆在点 M 处的切线方程为 $\quad y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$

即 $\quad bx + ay - \sqrt{2}ab = 0$

习题 2-4

1、 求下列方程所确定的隐函数的导数：

（1）$e^x - e^y - xy = 0$ （2） $\cos(xy) = x$

（3） $y = 1 + xe^y$ （4）$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$

2、 用对数求导法求下列函数的导数：

（1） $y = x^{\sin x}$ （2） $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2(x-3)}{(x+2)(x-4)}}$

（3） $y^x = x^y$ （4） $y = (\ln x)^x$

3、 求下列参数方程所确定的函数的导数：

（1）$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ （a 为常数） （2）$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$ （4）$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = te^{2t} \end{cases}$

§2-5 高阶导数

一般地，函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍是 x 的函数，有时可以对 x 再求导数。我们把 $y' = f'(x)$ 的导数叫做 $y = f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y''，$f''(x)$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

即 $y'' = (y')'$ ，$f''(x) = [f'(x)]'$ ，$\dfrac{d^2y}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})$

相应地，把 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的**一阶导数**。

类似地，函数 $y = f(x)$ 的二阶导数的导数叫做 $f(x)$ 的**三阶导数**，三阶导数的导数叫做 $f(x)$ **四阶导数**，…，一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数叫做 $f(x)$ 的 n **阶导数**。

三阶以上的导数分别记作： y''' ，$y^{(4)}$，$\cdots$，$y^{(n)}$

或 $f'''(x)$，$f^{(4)}(x)$ ，$\cdots$，$f^{(n)}(x)$

或 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ，$\dfrac{d^4y}{dx^4}$ ，$\cdots$ ，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**。

容易看出，求高阶导数只须一次一次地求导数，原则上不需要新的方法。

例 1 求下列函数的二阶导数：

（1） $y=\cos^2 x$　　　　（2） $s=e^{-t}\cos t$

解 （1） $y'=(\cos^2 x)'=2\cos x(-\sin x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$

$y''=(-\sin 2x)''=-\cos 2x\cdot 2=-2\cos 2x$

（2） $s'=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$

$s''=e^{-t}(\cos t+\sin t)-e^{-t}(-\sin t+\cos t)=2e^{-t}\sin t$

例 2 求 $y=e^x$ 的 n 阶导数

解 $y'=e^x$ ， $y''=e^x$ ， $y'''=e^x$ ， $\cdots$

一般地，可得 $(e^x)^{(n)}=e^x$

例 3 求 $y=x^n$ （n 为自然数）的各阶导数

解 $y'=nx^{n-1}$

$y''=n(n-1)x^{n-2}$

$y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$y^{(4)}=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

……

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1x^{n-n}=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$

$y^{(n+1)}=0$

例 4 已知物体作变速运动，其运动方程为 $s=t^3-3t+2$，求物体运动的速度和加速度。

解 $v=s'=(t^3-3t+2)'=3t^2-3$

$a=s''=(3t^2-3)'=6t$

习题 2-5

1、 求下列函数的二阶导数：

（1） $y=x^2\ln x$　　　　(2) $y=(1+x^2)\arctan x$

（3） $y=(x+3)^4$　　　　　　　　(4) $y=\ln(1-x^2)$

（5） $y=x\cos x$　　　　　　　　（6） $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

2、 试求正弦函数与余弦函数的 n 阶导数。

§2-6　函数的微分

函数的导数描述了函数 $y=f(x)$ 在点 x 处变化的快慢程度，即函数在点 x 处的变化率。在实际问题中，我们常常还需要计算当自变量有一微小增量 Δx 时函数的增量 Δy 。计算函数的增量 Δy 可用公式 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，但有时计算会比较麻烦，因此需要找到一个表达函数增量的既简单又具有较高精确度的近似表达式。这样就引出了微分的概念。

一、微分的概念

1、微分的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，有　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

所以　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$　（其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小）

于是有　$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$

上式说明，函数的增量可以表示为两项之和，第一项 $f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，我们把它叫做 Δy 的**线性主部**，第二项 $\alpha\cdot\Delta x$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小。当 Δx 很小时， $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$，我们称第一项 $f'(x_0)\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 的微分。

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内可导，称为函数在点 x_0 的**微分**，记作 dy，即

$$dy=f'(x_0)\Delta x$$

这时也说 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的。

一般地，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分记作　$dy=f'(x)\Delta x$

例 1 求函数 $y=x^3$ 当 $x_0=2$, $\Delta x=0.01$ 时的微分

解　$dy=f'(x_0)\Delta x=(x^3)'\cdot\Delta x=3{x_0}^2\Delta x$

所以，当 $x_0=2$, $\Delta x=0.01$ 时函数的微分为　$dy=3\times 2^2\times 0.01=0.12$

通常把自变量的增量 Δx 称为**自变量的微分**，记为 dx。因此函数的微分可以写成

$$dy = f'(x)dx$$

由上式可得 $$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

即：函数的导数等于函数的微分 dy 除以自变量的微分 dx。因此，导数也叫做**微商**。

2、微分的几何意义

在曲线 $y = f(x)$ 上取两点 $M(x_0, y_0)$ ，$N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$，由图 2-可知，

$MQ = \Delta x, QN = \Delta y$。

过点 M 作曲线的切线 MT ，它的倾斜角为 α ，

则 $QP = MQ \cdot \tan\alpha = f'(x)\Delta x = dy$

由此可知，当 Δy 是曲线 $y = f(x)$ 上的点的纵坐标的改变量时，dy 就是曲线的切线上的点的纵坐标的相应改变量。这就是微分的几何意义。

图 2-

二、微分的运算

1、微分的基本公式

(1) $d(c) = 0$ （c 为常数）

(2) $d(x^{\alpha}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}dx$

(3) $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}dx$

(4) $d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$

(5) $d(a^x) = a^x \cdot \ln a\,dx$

(6) $d(e^x) = e^x dx$

(7) $d(\sin x) = \cos x dx$

(8) $d(\cos x) = -\sin x dx$

(9) $d(\tan x) = \sec^2 x\,dx$

(10) $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

(11) $d(\sec x) = \sec x \cdot \tan x\,dx$

(12) $d(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x dx$

(13) $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(14) $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(15) $d(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

(16) $d(arc\cot x) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

2、微分的运算法则

（1）$d(u \pm v) = du \pm dv$

（2）$d(uv) = vdu + udv$

（3）$d(cu)=cdu$（c 为常数）　　(4) $d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$

3、微分形式的不变性

设函数 $y=f(u)$

如果 u 是自变量，则有　$dy=f'(u)dx$

如果 u 是中间变量，设 $u=\varphi(x)$，则 y 是 x 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$。根据复合函数的求导法则，有　$dy=f'(u)\cdot\varphi'(x)dx=f'(u)du$

这说明，不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(x)$ 的微分总可以表示为同一种形式 $f'(u)du$，这一性质叫做**微分形式的不变性**。

例 2　求 $y=\sin(2x+1)$ 的微分 dy

解 1　$dy=[\sin(2x+1)]'dx=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx$

解 2　$dy=d\sin(2x+1)=\cos(2x+1)d(2x+1)=2\cos(2x+1)dx$

例 3 求 $y=\frac{e^{2x}}{x}$ 的微分 dy

解 1　$dy=(\frac{e^{2x}}{x})'dx=\frac{2xe^{2x}-e^{2x}}{x^2}dx=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}dx$

解 2　$dy=d(\frac{e^{2x}}{x})=\frac{xde^{2x}-e^{2x}dx}{x^2}=\frac{2xe^{2x}dx-e^{2x}dx}{x^2}=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}dx$

例 4 利用微分求由方程 $e^{xy}=a^xb^y$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$

解　对方程两边分别求微分，得　$d(e^{xy})=d(a^xb^y)$

$$e^{xy}d(xy)=b^yd(a^x)+a^xd(b^y)$$

$$e^{xy}(ydx+xdy)=b^ya^x\ln adx+a^xb^y\ln bdy$$

$$e^{xy}(ydx+xdy)=a^xb^y(\ln adx+\ln bdy)$$

$$(x-\ln b)dy=(\ln a-y)dx$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln a-y}{x-\ln b}$$

三、微分在近似计算中的应用

我们已经知道，当$|\Delta x|$很小时，可以用函数的微分dy来近似代替函数的增量Δy，即

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy \tag{2-6-1}$$

一般而言，$|\Delta x|$越小，近似程度越高，由于通常dy较Δy容易计算，所以(2-6-1)式很有实用价值。下面从两个方面讨论微分在近似计算中的应用。

1、计算函数增量的近似值

例 5 一块金属圆片加热后，半径$10cm$由变为$10.05cm$，问圆片的面积大约增加了多少?

解 设圆片的半径为r，面积为S，则 $S=\pi r^2$

由公式(2-6-1) 得 $\Delta S\approx dS=2\pi r\Delta r=2\pi\times 10\times 0.05=\pi\, cm^2$

即 圆片的面积大约增加了$\pi\, cm^2$

2、计算了函数值的近似值

由(2-6-1)式可得 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy= f'(x_0)\Delta x$

即有 $$f(x_0+\Delta x)= f(x_0)+ f'(x_0)\Delta x \tag{2-6-2}$$

如果在点x_0处$f(x_0)$和$f'(x_0)$的值较容易计算,那么，当$|\Delta x|$很小时，就可以利用（2-6-2）计算函数$f(x)$在x_0处附近的函数值$f(x_0+\Delta x)$的近似值.

例 6 计算$\sin 46^\circ$的近似值

解 设$f(x)=\sin x$， 因为$46^\circ=45^\circ+1^\circ=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}$，取$x_0=\frac{\pi}{4}$，$\Delta x=\frac{\pi}{180}$,

由于 $f'(x)=\cos x$ ， 容易求得

$$f(x_0)=f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad ,\quad f'(x_0)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

代入公式（2-6-2）,得 $\sin 46\approx\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{180}=0.7071+0.0123=0.7194$

在公式（2-6-2）中,令$x_0=0$，$\Delta x=x$， 则有

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

++当$|x|$很小时,可用上式来计算函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 附近的近似值。我们可以应用公式(2-6-3)推得以下几个在工程上常用的近似公式：

（1）$e^x \approx 1+x$　　（2）$\ln(1+x) \approx x$　　（3）$\sin x \approx x$

（4）$\tan x \approx x$　　（5）$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$　　（6）$\arcsin x \approx x$

上述公式请读者自行证明。

例 7 计算$\sqrt[3]{1.02}$，$e^{-0.001}$的近似值：

解　（1）利用近似公式（5）得　$\sqrt[3]{1.02} = \sqrt[3]{1+0.02} \approx 1+\frac{1}{3}\times 0.02 \approx 1.0067$

（2）利用近似公式（1）得　$e^{-0.001} \approx 1+(-0.001) = 0.999$

习题 2-6

1、 求下列函数的微分

（1）$y = x^2+3x-2$　　（2）$y=\ln(1+e^{x^2})$

（3）$y = e^{1-3x}\cos x$　　（4）$y = e^{\sin 2x}$

（5）$y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$　　（6）$y = \tan^2(1+2x^2)$

（7）$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　（8）$y = (e^x+e^{-x})^2$

2、 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数$\frac{dy}{dx}$

（1）$x+y = \arctan y$　　（2）$ye^x + \ln y = 1$

3、 将适当的函数填入下列的括号内，使等式成立

（1）$d(\qquad) = 2dx$　　（2）$d(\qquad) = 3xdx$

（3）$d(\qquad) = \cos\omega x dx$　　（4）$d(\qquad) = \frac{1}{x+2}dx$

（5）$d(\qquad) = e^{-2x}dx$　　（6）$d(\qquad) = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

（7）$d(\sin^2 x) = (\qquad)d(\sin x)$

（8）$d[\ln(2x+3)]=(\qquad)d(2x+3)=(\qquad)dx$

4、 利用微分求下列各式的近似值

（1）$\sqrt[3]{1010}$　　（2）$e^{0.04}$　　（3）$\cos 29°$　　（4）$\ln 1.002$