

第一章 函数的极限与连续

极限概念是高等数学中最基本、最重要的概念，是微积分理论的基础。本章将在复习高中所学的极限概念的基础上，进一步介绍两个重要极限，无穷小与无穷大的概念以及函数的连续性。

§1-1 函数的极限

一、函数的极限：

1、当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1 当 $|x|$ 无限增大（即 $x \rightarrow \infty$ ）时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A ，那么常数 A 就叫做当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限。记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad \text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时 } f(x) \rightarrow A$$

例如：当 $x \rightarrow \infty$ 时， $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ 便可记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

定义 2 当 $x \rightarrow +\infty$ （或 $x \rightarrow -\infty$ ）时，如果 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A ，那么常数 A 就叫做当 $x \rightarrow +\infty$ （或 $x \rightarrow -\infty$ ）时，函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A)$$

$$\text{或 } x \rightarrow +\infty \text{ (} x \rightarrow -\infty \text{)} \quad f(x) \rightarrow A$$

例如：函数 $y = \arctan x$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } \arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{记作} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } \arctan x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{记作} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是： $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

2、当 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 3 当 $x \rightarrow x_0$ （ x 可以不等于 x_0 ）时，若函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A ，那么常数 A 就叫作当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限。记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 当

$$x \rightarrow x_0 \text{ 时 } f(x) \rightarrow A$$

定义 4 无限地趋近于一个确定的常数 A ，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的

左极限（或右极限），记作：

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0-0) = A$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0+0) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A \text{ 存在的充分必要条件是: } f(x_0-0) = f(x_0+0) = A$$

$$\text{例如 函数 } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{左极限 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

$$\text{右极限 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在}$$

二. 极限的运算法则：

$$\text{设 } \lim f(x) = A, \lim g(x) = B$$

$$\text{法则 1 } \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$\text{法则 2 } \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$\text{法则 3 } \lim kf(x) = k \cdot \lim f(x) = k \cdot A \quad (\text{其中 } k \text{ 为常数})$$

$$\text{法则 4 } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\lim g(x) = B \neq 0)$$

说明：1、法则 1 和法则 2 可以推广出有限个函数的情形；

2、由法则 2 可以得出：若 $\lim f(x)$ 存在， n 为正整数，

$$\text{则: } \lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

3、法则 4 在使用时，分子分母的极限都必须存在且分母的极限不能为零。

$$\text{例 1 求 } \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 3x + 1)$$

解 根据极限四则运算法则，得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 3x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 3x + \lim_{x \rightarrow 3} 1 \\ &= 2(\lim_{x \rightarrow 3} x)^2 - 3\lim_{x \rightarrow 3} x + 1 = 2 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 10 \end{aligned}$$

例2 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$

解 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 1}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3} = \frac{2^3 - 1}{2^2 - 5 \times 2 + 3} = -\frac{7}{3}$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

解 因为分母的极限 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$ ，因此不能应用商的极限运算法则，但分母

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ ，而且当 $x \rightarrow -1$ 时 $x + 1 \neq 0$ ，故分式可以约去公因式 $(x + 1)$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$$

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$

解 当 $x \rightarrow 1$ 时，两个分式分母的极限都为零，两项均无极限，不能直接应用求极限的法则。可以先通分，约去非零因子 $(x - 1)$ ，再求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{1 + 2}{1^2 + 1 + 1} = 1$$

例5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 1}$

解 由于分子，分母极限都不存在，因此不能用商的极限运算法则。先用 x^2 去除分子，分母，然后求极限，得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

例6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^3 - x^2 + 5}$

解 分子，分母同除以 x^3 ，然后取极限，得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^3 - x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1}$

解 利用例 6 的结果, 并根据第 3 节中无穷小与无穷大的关系, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1} = \infty$$

由例 5, 例 6, 例 7 所给出的方法和结果, 可以得出下列结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

例 8 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2})$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \cdots + n)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$

习题 1-1

1、指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y = \sin(2x + 1)$

(2) $y = \ln \tan \frac{x}{2}$

(3) $y = \sin^2(e^x)$

(4) $y = \sqrt{\ln(1 - 3x)}$

2、求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 1}{x^2 + 1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 + 1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

(8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{2x^3 + 1}$

§1-2 无穷小与无穷大

一、无穷小

1、无穷小的定义

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的极限为零, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad (\text{或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0)$$

则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小量**, 简称**无穷小**。

例如: 函数 $f(x) = x - 1$ 是当 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小, 又如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是

当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小。

在无穷小的定义中要注意以下的问题:

(1) 要指明自变量的变化过程, 如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小; 但当 $x \rightarrow 2$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$ 就不是无穷小。

(2) 极限为零的函数都是无穷小, 但无穷小并不一定都等于零。

(3) 不能说绝对值非常小的常数是无穷小, 常数中只有零可以当作无穷小。

2、无穷小的性质

- (1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;
- (3) 有界函数与无穷小之积仍为无穷小;
- (4) 常数与无穷小的乘积仍为无穷小。

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子分母的极限都不存在, 但 $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小, 而 $\sin x$ 是有界函数, 所以根据无穷小的性质 3 可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

3、无穷小与函数极限的关系

定理 在自变量的同一变化过程中 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$), 具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和; 反之, 如果函数可以表示为一个常数与无穷小之和, 那么该常数就是这个函数的极限。

即 $\lim f(x) = A$ 的充要条件为 $f(x) = A + \alpha$ (其中, A 是常数, α 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小, 即 $\lim \alpha = 0$)

二、无穷大

1、无穷大的定义：

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大量**, 简称**无穷大**。

当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大的函数, 按通常的定义来说, 极限是不存在的, 但为了便于叙述函数的这一状态, 我们也说“函数的极限是无穷大”, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$$

例如, $f(x) = x$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 是当 $x \rightarrow 1$ 时的无穷大。

在无穷大定义中要注意以下问题:

- (1) 要指明自变量的变化趋势;
- (2) 不能说一个非常非常大的常数为无穷大, 无穷大表示一个变量, 在变化过程中, 其绝对值可变得比任何一个很大的正数还大。

2、无穷小与无穷大的关系:

定理 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之,

如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大

例如, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 2^x 是无穷大, 而 $\frac{1}{2^x}$ 是无穷小; 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = x$ 是无穷小, 而 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是无穷大。

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{x^3 + 3x^2 + 2}$

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子分母的极限都不存在, 不能用商的法则求极限, 但是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 2}{x^4 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}} = 0$$

所以根据无穷小与无穷大的关系有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{x^3 + 3x^2 + 2} = \infty$

三、无穷小的比较

由无穷小的性质可知, 两个无穷小的和、差、积仍是无穷小, 但两个无穷小的商却会

出现不同的情况。例如，当 $x \rightarrow 0$ 时， $3x$ ， x^2 ， $\sin x$ 都是无穷小，但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \infty$$

这些情形说明，不同的无穷小趋近于零的快慢程度不同。为了描述无穷小的这种重要关系，我们有如下的定义。

定义 设 α ， β 是同一变化过程中的无穷小；

- (1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，则称 β 是比 α 较高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$
- (2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ ，则称 β 是比 α 较低阶的无穷小；
- (3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$ ，则称 β 是与 α 同阶的无穷小；
- (4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ，则称 β 是与 α 等价的无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$

等价无穷小必然是同阶无穷小，但同阶无穷小不一定是等价无穷小。
关于等价无穷小有下面重要的性质：

定理 设 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 为同一变化过程中的无穷小，若 $\alpha \sim \alpha'$ ， $\beta \sim \beta'$ ，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$

存在，则有 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$

这个定理告诉我们，在求两个无穷小之比的极限时，可将分子，分母用等价无穷小来代替，这样做，可以简化极限计算。

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin 3x \sim 3x$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

解 $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x)$

当 $x \rightarrow 0$ 时， $\tan x \sim x$ ， $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$

应用等价无穷小求极限，要注意以下两点：

- (1) 分子、分母都是无穷小；
- (2) 用等价无穷小代替时，只能换掉整个分子或分母，而不能只换分子或分母中的一

部分。

习题 1-2

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ 相比, 那一个是高阶无穷小?

2、证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$(1) \arcsin x \sim x \quad (2) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

3、求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + 3x}$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

§1-3 两个重要极限

一、极限存在的准则

准则 1 (单调有界准则) 单调有界数列必有极限

准则 2 (夹逼准则) 设函数 $g(x)$, $f(x)$, $h(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 且满足下列条件:

$$(1) g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$$

则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

证明从略

二、两个重要极限

$$1、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

这个极限有以下两个特征:

(1) 分子分母均为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小

(2) 分子中正弦符号后的变量与分母在形式上必须一样。如等等。当分子, 分母趋于零时, 它们的极限都等于 1, 否则极限不等于 1。

$$\text{例 1 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\text{例 2 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$\text{例 3 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\text{例 4 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin \frac{x}{2})^2}{4 \times (\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \frac{x}{2})^2}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

其中 e 是常数，且是无理数 $e = 2.7182881828459045 \dots$

列表观察函数 $(1 + \frac{1}{x})^x$ ，当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势。

x	...	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...
$(1 + \frac{1}{x})^x$	...	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828	...

x	...	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	-10^6	...
$(1 + \frac{1}{x})^x$	...	2.86797	2.73200	2.71964	2.71841	2.71830	2.71828	...

由上表可知，当 $x \rightarrow \infty$ 时， $(1 + \frac{1}{x})^x \rightarrow e$ 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 这个极限有如下特征：

- (1) 函数括号内是两项的和，第一项是 1，第二项是无穷小；
- (2) 括号外的指数是括号内无穷小的倒数（即指数趋于 ∞ ）。

令 $x = \frac{1}{t}$ 即 $t = \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时， $t \rightarrow 0$ ，可以得到该极限的另一种形式

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \quad \text{即} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{例 5 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2$$

$$\text{例 6 } \text{求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = e \cdot 1 = e$$

$$\text{例 7 } \text{求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x-2}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)}\right]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)}\right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

习题 1-3

1、计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

2、计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$$

§1-4 函数的连续性

一、函数的连续性

1、函数的改变量（或增量）

定义 如果变量 u 从初值 u_1 变到终值 u_2 ，那么终值 u_2 与初值 u_1 的差叫做变量 u 的**增量**

（或**改变量**）。记为 Δu ，即 $\Delta u = u_2 - u_1$

- (1) 增量 Δu 可以是正的, 也可以是负的, 当 Δu 为正时, 变量 u 是增加的; 当 Δu 为负时, 变量 u 是减少的。
- (2) Δu 并不表示 Δ 与 u 的乘积, 而是一个不可分割的整体。

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义。当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 函数 y 的值相应地由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$, 因此函数 y 的相应增量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

2、函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的连续性

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 的增量 Δx 趋近于零时, 函数 $y = f(x)$ 相应的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 也趋近于零, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是连续的。

例 1 证明函数 $y = 2x + 1$ 在点 $x = 1$ 处是连续的。

证 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 设自变量在 $x = 1$ 处有增量 Δx , 则函数相应的增量为

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [2(1 + \Delta x) + 1] - (2 \times 1 + 1) = 2\Delta x$$

因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\Delta x = 0$

所以 由定义 1 知函数 $y = 2x + 1$ 在点 $x = 1$ 处是连续的

在定义 1 中, 如果设 $x = x_0 + \Delta x$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 就是 $x \rightarrow x_0$, $\Delta y \rightarrow 0$ 就是 $f(x) \rightarrow f(x_0)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 就是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。因此函数在点 x_0 的连续性的定义又可叙述如下:

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限存在, 且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

那么, 就说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 是连续的, 点 x_0 叫做函数的连续点。

例 2 用定义 2 证明函数 $y = 2x + 1$ 在点 $x = 1$ 处是连续的。

证 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

即有 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

所以 $y = 2x + 1$ 在点 $x = 1$ 处是连续的

下面给出左、右连续的概念：

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 内有定义，如果左极限 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 存在且等于 $f(b)$ ，即 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$ ，就说函数 $f(x)$ 在点 b 左连续。

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 内有定义，如果右极限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 存在且等于 $f(a)$ ，即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ，就说函数 $f(x)$ 在点 a 右连续。

3、函数 $y = f(x)$ 在区间内的连续性

在区间 (a, b) 内每一点都连续的函数叫做该区间内的连续函数；区间 (a, b) 叫做函数的连续区间。如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，在 (a, b) 内连续，且在右端点 b 左连续，在左端点 a 处右连续，即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$

那么函数就在闭区间 $[a, b]$ 上连续。

连续函数的图像是一条不间断的曲线。

二、函数的间断点

根据函数在点 x_0 的连续性的定义可知，要使函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的连续，必须满足以下三个条件：

- (1) 在点 x_0 的某一邻域内有定义
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

不满足以上三个条件之一者，就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的是不连续的，或是间断的。

点 x_0 称函数 $f(x)$ 的不连续点，或是间断点。

例 3 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在点 $x = 1$ 处没有定义，所以 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。但

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$\text{例 4 函数 } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases} \text{ 在点 } x=1 \text{ 处有定义, 且 } f(0)=0$$

$$\text{但左极限 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$$

$$\text{右极限 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

左、右极限不相等, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

例 5 正切函数 $y = \tan x$ 在点 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) 处没有定义, 所以点 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) 是函数的间断点。

通过上述几个间断点的例题可以看出, 间断点有着不同的类型, 我们通常把间断点分成两类:

(1) 如果函数 $y = f(x)$ 在间断点 x_0 处的左右极限都存在, 则称 x_0 为函数的**第一类间断点**。在第一类间断点中若当 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ (即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在), 称 x_0 为**可去间断点**, 如例 3。若 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, 称 x_0 为**跳跃间断点**, 如例 4。

(2) 除第一类间断点外的任何间断点都称为**第二类间断点**。第二类间断点又可分为无穷型、振荡型等, 如例 5 为无穷型 (在间断点处 $f(x)$ 的左右极限中有一个为无穷大)。

三、初等函数的连续性

由极限的四则运算法则及函数点 x_0 是连续性的定义可得下面定理:

定理 1 若 $f(x), g(x)$ 均在点 x_0 处连续, 则

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0) \text{ 也都在点 } x_0 \text{ 处连续。}$$

定理告诉我们, 连续函数的和 (差), 积, 商 (分母不为零) 仍是连续函数。我们还可以得到连续函数的复合函数的连续性定理

定理 2 连续函数的复合函数仍是连续函数。

由定理 1 和定理 2 及初等函数定义可得出

定理 3 一切初等函数在其定义域内是处处连续的。

定理 3 给我们提供了求初等函数求极限的一个重要而简单的方法, 如果 $f(x)$ 是初等函

数, 且 x_0 是定义域内的点, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

并且求复合函数的极限时, 函数符号 “ f ” 和极限符号 “ $\lim$ ” 可以交换次序。

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 4x + 1)$

解 因为 $f(x) = e^x + 4x + 1$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的初等函数, 而 $x = 0$ 是定义区间内的一点, 因此有 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 4x + 1) = e^0 + 4 \times 0 + 1 = 2$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(x^2 + 1)$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(x^2 + 1) = \arcsin[\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

四、闭区间上连续函数的性质

性质 1 (最大值与最小值定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它在这个区间上一定有最大值与最小值

性质 2 (介值定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, m 和 M 分别为 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 则对介于 m 和 M 之间的任一实数 c (即 $m < c < M$), 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$

推论 (根的存在定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

例 8 证明方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个实根

证 $f(x) = x^5 - 3x - 1$ 是初等函数, 它在 $[1, 2]$ 上是连续的,

且 $f(1) = -3 < 0$ $f(2) = 25 > 0$

根据根的存在定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f(\xi) = 0$

即 $\xi^5 - 3\xi - 1 = 0$ ($1 < \xi < 2$)

上式说明, 方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个实根。

习题 1-4

1、讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 3, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = 2$ 各点的连续性, 并画出它

们的图像。

2、求下列函数的间断点:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(2) y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$$

$$(3) y = \begin{cases} 3 + x^2, & x < 0 \\ \frac{\sin 3x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

3、求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2 \cos(\pi - x)}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x - 4} - \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \ln(2 \cos 3x)$$

$$(6) \lim_{t \rightarrow -2} \frac{e^t + 1}{t}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

4、证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实根。